

Nodale Kurven und Hilbertschemata

Diplomarbeit
am Fachbereich Mathematik der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von
Heinrich Hartmann
aus Heidesheim

betreut von
Prof. Dr. Manfred Lehn

Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	5
1. Vorwort	5
2. Bezeichnungen und Konventionen	6
3. K3 Flächen	7
Kapitel 2. Das Hilbertschema	9
1. Einführung	9
2. Die kleine Diagonale	10
3. Schnittmultiplizitäten	11
4. Anhang: Singular Quelltext	13
Kapitel 3. Die Kohomologie des Hilbertschemas	15
1. Die Kohomologie als Vektorraum	15
2. Die Nakajimaoperatoren	15
3. Fockraum und Heisenberg-Algebra	16
4. Die Cup-Produkt-Paarung	19
Kapitel 4. Das Cup-Produkt	21
1. Die Graduierung	21
2. Frobenius-Algebren	22
3. Ungeordnete Tensorprodukte	23
4. Multiplikationsabbildungen	24
5. Die symmetrische Gruppe	24
6. Das Modell	25
7. Das Cup-Produkt	26
Kapitel 5. Nodale Kurven und Hilbertschemata	31
1. K-Theorie	31
2. Chernklassen tautologischer Bündel	32
3. Die Fundamentalklasse der Diagonalen	34
4. Linearsysteme auf K3 Flächen	39
Literaturverzeichnis	43

KAPITEL 1

Einleitung

1. Vorwort

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem klassischen Problem. Gegeben eine Familie von Kurven $C_t \subset X, t \in \mathbb{P}^k$ auf einer glatten, projektiven Fläche X über \mathbb{C} , wieviele Kurven sind singulär?

Im Fall von K3 Flächen haben Yau, Zaslow ([21]) diese Zahlen mit den Koeffizienten gewisser Modulformen in Verbindung gebracht (vgl. Beauville ([2]). Sie benutzen dabei Eulerzahlen von kompaktifizierten Jacobivarietäten. Mit Hilfe von Gromov-Witten-Invarianten konnten Bryan und Leung in [4] dieses Resultat verallgemeinern.

Wir verfolgen in dieser Arbeit einen konzeptionell anderen Ansatz, der sich direkt auf eine erweiterte Fragestellung verallgemeinern lässt: *Wieviele Kurven haben Singularitäten von einem speziellen Typ?*

Der Typ einer (endlich bestimmten) Singularität (C, x) wird durch das endliche Unterschema $S := \text{Spec}(\mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x^m) \subset C$ für ein $m \geq 0$ festgelegt. Die Frage, ob eine Kurve C eine Singularität vom Typ S hat, ist demnach äquivalent zu der Frage: Hat C ein (endliches) Unterschema isomorph zu S ?

Wir benutzen das Hilbertschema $X^{[n]}$, um diese Frage zu beantworten: Nach Definition ist $X^{[n]}$ die Menge aller nulldimensionalen Unterschemata von X , deren Koordinatenring Vektorraumdimension n hat. Diese Menge trägt nach einem Satz von Grothendieck ([11]) selbst wieder die Struktur eines projektiven Schemas. Die Menge aller Unterschemata von X , die isomorph zu S sind, definiert eine (lokal) abgeschlossene Teilmenge von $X^{[n]}$.

Die Zahl der singulären Kurven im System $(C_t)_t$ vom Typ S können wir nun als Schnitzzahl der folgenden Untervarietäten von $X^{[n]} \times \mathbb{P}^k$ schreiben:

$$\delta_S = \{ (A, t) \mid A \cong S \} \quad \text{und} \quad Z = \{ (A, t) \mid A \subset C_t \}.$$

Um diese Zahl auszurechnen, müssen wir die Fundamentalklassen bestimmen und das Cup-Produkt dieser Kohomologieklassen über $X^{[n]} \times \mathbb{P}^k$ integrieren. Dazu benötigen wir eine Beschreibung des Kohomologierings des Hilbertschemas.

Die Kohomologie des Hilbertschemas wurde von verschiedenen Autoren intensiv studiert. Göttsche berechnet in [7] die Bettizahlen des Hilbertschemas, Nakajima konstruiert in [19] eine geometrische Basis der Kohomologie, welche die Berechnung der Cup-Produkt-Paarung erlaubt. Dazu definiert er auf der Gesamtkohomologie aller Hilbertschemata

$$\mathbb{H} := \bigoplus_{n \geq 0} H^*(X^{[n]}, \mathbb{C})$$

Endomorphismen $q_i[u]$, die von einer Zahl i und einer Klasse $u \in H(X)$ abhängen. Sind $u = [V]$ und $\alpha = [W]$ die Fundamentalklassen von Untervarietäten $V \subset X$ und $W \subset X^{[n]}$, so ist $q_i[u]\alpha$ die Fundamentalklasse der Untervarietät von $X^{[n+i]}$, die aus W durch Hinzufügen von in einem Punkt aus V konzentrierten Unterschemata von X der Länge i entsteht. Wenden wir $q_i[u]$ auf das Vakuum $[\{\emptyset\}] \in H(X^{[0]})$ an,

erhalten wir also die Fundamentalklasse der Varietät, die konzentrierte Unterschemata von V der Länge i parametrisiert.

Wir führen dieses Programm im einfachsten Spezialfall eines einfachen Doppelpunktes $N = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x, y)^2)$ durch und damit beweisen einen Teil des Resultates von Bryan und Leung:

SATZ 1.1. *Sei X eine K3 Fläche, $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ ein Geradenbündel und $V \subset \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$ ein linearer Unterraum der Dimension 2. Für alle $[s] \in \mathbb{P} := \mathbb{P}(V)$ habe $V(s)$ höchstens einen Doppelpunkt. Dann gilt:*

$$\#\{[s] \in \mathbb{P} \mid V(s) \text{ singular}\} = \int [\delta_N] \cdot [Z] = 24 + 3 \int c_1(\mathcal{L})^2.$$

Um $[Z]$ zu bestimmen, schreiben wir Z als Verschwindungsort eines getwisteten tautologischen Bündels und erhalten die Fundamentalklasse somit als höchste Chernklasse.

Die spezielle Gestalt von $[Z]$ und $\delta_N \cong X$ erlauben in diesem Fall einen direkteren Beweis ohne Verwendung der vollen Information über $[\delta_N]$. Trotzdem geben wir eine vollständige Beschreibung dieser Klasse in der Nakajimabasis:

SATZ 1.2. *Sei X eine projektive K3 Fläche, $X^{[3]}$ das Hilbertschema von 3 Punkten auf X . Das abgeschlossene Unterschema*

$$\delta_N := \{A \in X^{[3]} \mid \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_A) \cong \mathbb{C}[x, y]/(x^2, xy, x^2)\}$$

hat die Fundamentalklasse

$$\begin{aligned} [\delta] &= 24 q_3[\text{vol}] |0\rangle + 3 q_1[\text{vol}] q_1[\text{vol}] q_1[\mathbf{1}] |0\rangle + 3 \sum_i q_1[\text{vol}] q_1[\gamma^i] q_1[\gamma^i] |0\rangle \\ &= 24 q_3[\text{vol}] |0\rangle + q_{(1,1,1)}[\mathbf{1}] |0\rangle. \end{aligned}$$

Dabei sind $\gamma^i \in \mathbf{H}^2(X)$ eine Orthogonalbasis und $q_i[\cdot]$ die Nakajimaoperatoren.¹

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir Klassen $\alpha \in X^{[3]}$ finden, für die wir einerseits eine Beschreibung in der Nakajima-Basis haben, andererseits aber $\int [\delta] \cdot \alpha$ aus geometrischen Überlegungen bestimmen können. Wir verwenden dazu Chernklassen tautologischer Bündel. Die Darstellung dieser Klassen in der Nakajima-Basis wurde von Lehn in [15] bestimmt. Außerdem benötigen wir für die Berechnung von c_1^2 eine Beschreibung des vollen Cup-Produktes. Lehn und Sorger geben diese für den Fall von K3 Flächen in [16].

2. Bezeichnungen und Konventionen

Für eine endliche Menge M bezeichne $\#M$ die Anzahl der Elemente. Sei $X = X_1 \times \dots \times X_k$ ein Produkt von Mengen (bzw. topologischen Räumen, Schemata, ...) und $I = (i_1, \dots, i_l)$ ein Tupel natürlicher Zahlen $\leq k$. Wir bezeichnen mit

$$\text{pr}_I := (\text{pr}_{i_1}, \dots, \text{pr}_{i_l}) : X \rightarrow X_{i_1} \times \dots \times X_{i_l}$$

die Projektion auf den I -ten Faktor.

Es bezeichne **Shm** die Kategorie der noetherschen, separierten Schemata von endlichem Typ über \mathbb{C} . Wir betrachten im Folgenden nur Schemata aus dieser Kategorie.

Sei X ein Schema, $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Wir bezeichnen mit \mathfrak{m}_x die Idealgarbe des abgeschlossenen, reduzierten Unterschemas $\{x\} \subset X$. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe, das assoziierte Unterschema bezeichnen wir mit $V(\mathcal{I})$. Sei E ein lokal-freier, kohärenter \mathcal{O}_X -Modul, $s \in E$ ein globaler Schnitt. Wir bezeichnen mit $V(s)$ das Unterschema, das in lokalen Koordinaten $E|_U \cong \mathcal{O}_X|_U^{\oplus r}$, $s|_U \mapsto (s_1, \dots, s_r)$

¹vgl. Kapitel 3.

durch das Ideal $(s_1, \dots, s_r) \subset \mathcal{O}_X|_U$ beschrieben wird. $V(s)$ ist also der Verschwindungsort des Schnittes.

Mit Kohomologie meinen wir stets (singuläre) Kohomologie über \mathbb{C} :

$$H(X) := H^*(X, \mathbb{C})$$

Mit u, v bezeichnen wir das Cup-Produkt zweier Klassen $u, v \in H(X)$. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten. Wir definieren eine Gysin-Abbildung $f_* : H(X) \rightarrow H(Y)$ durch $f_* := PD \circ f_* \circ PD^{-1}$. Dabei bezeichnet PD den Poincaréisomorphismus $PD : H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_*(X, \mathbb{C})$, $u \mapsto u \cap [X]$ und $f_* : H_*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_*(Y, \mathbb{C})$ die von f induzierte Abbildung zwischen den (singulären/Borel-Moore) Homologiegruppen. Die Fundamentalklasse einer orientierten Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ fassen wir via PD als ein Element $[Z] \in H(X)$ der Kohomologie auf. Es gelten folgende Aussagen (vgl. [9], Anhang B):

- i. (Funktorialität) Sei $g : Y \rightarrow Z$, Z eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

- ii. (Projektionsformel) Sei $u \in H(X), v \in H(Y)$, dann gilt:

$$f_*(f^*(u) \cdot v) = u \cdot f_*(v)$$

- iii. (Natürlichkeit) Sei $g : S \rightarrow Y$, S eine kompakte Mannigfaltigkeit. Sei

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f'} & S \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein orientiertes, kartesisches Diagramm, dann ist:

$$g'_* \circ f'^* = f_* \circ g_*$$

Es sei X eine zusammenhängende, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Die Fundamentalklassen von $\{pt.\}, X \subset X$ bezeichnen wir mit:

$$\text{vol} := [pt.] \in H^n(X), \quad \mathbf{1} := [X] \in H^0(X)$$

Die Schnitt- bzw. Cup-Produkt-Paarung auf $H(X)$ ist die nicht ausgeartete Bilinearform:

$$(-, -) : H(X) \times H(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int u \cdot v$$

Dabei ist $\int : H(X) \rightarrow H^n(X) = \mathbb{C}\langle \text{vol} \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ die ausgezeichnete lineare Abbildung mit $\int \text{vol} = 1$ und $\int u = 0$ für alle $u \in H^k(X), k < n$.

3. K3 Flächen

Wir fassen kurz einige Resultate über K3 Flächen zusammen (vergleiche [1]):

DEFINITION 1.3. Eine komplexe Mannigfaltigkeit X der Dimension zwei heißt *K3 Fläche*, falls:

- (1) X kompakt,
- (2) $h^1(\mathcal{O}_X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ und
- (3) $\omega_X = \det \Omega_X \cong \mathcal{O}_X$.

Es sei X eine K3 Fläche. X ist als komplexe Mannigfaltigkeit auf natürliche Weise orientiert.

Die Eulercharakteristik der Strukturgarbe $\chi(\mathcal{O}_X)$ ist 2, denn $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ und nach Serre-Dualität: $h^2(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X \otimes \omega_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Noethers Formel liefert also:

$$24 = 12\chi(\mathcal{O}_X) = \int c_1^2(X) + c_2(X).$$

Da $c_1^2(X) = c_1^2(\omega_X) = 0$ folgt $\int c_2(X) = 24$ und somit auch für die topologische Eulercharakteristik $e(X) = \int c_2(X) = 24$. Jede K3 Fläche ist Kählersch. Wir erhalten aus der Hodgezerlegung $b_1(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X) = 2h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Aus Poincarédualität folgt nun $b_3(X) = 0$. Zusammen mit $e(X) = 24$ erhalten wir $b_2(X) = 22$. Bettizahlen von X sind also:

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 22, b_3 = 0, b_4 = 1$$

Wir benötigen einige weitere charakteristische Klassen von X :

$$(1.1) \quad c(X) = 1 + 24 \text{ vol}$$

$$(1.2) \quad \text{ch}(X) = 2 + c_1(X) + \frac{1}{2}(c_1(X)^2 - 2c_2(X)) = 2 - 24 \text{ vol}$$

$$(1.3) \quad \text{td}(X) = 1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X)) = 1 + 2 \text{ vol}$$

Für das Cup-Produkt auf einer K3 Fläche halten wir fest: Multiplikation mit vol ist aus Gradgründen trivial. $\mathbf{1}$ operiert als neutrales Element. Die Multiplikation von zwei Elementen aus $H^2(X)$ ergibt ein Vielfaches von vol . Die volle Information über das Cup-Produkt steckt also in der Schnitt-Paarung:

$$(1.4) \quad q : H^2(X, \mathbb{C}) \otimes H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^4(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle \text{vol} \rangle \cong \mathbb{C}$$

GENERALVORAUSSETZUNG 1.4. Im gesamten Text bezeichnet X eine glatte Fläche und $(\gamma_1, \dots, \gamma_{22})$ eine Orthogonalbasis von $H^2(X, \mathbb{C})$. Die Gesamtkohomologie $H(X)$ wird also frei erzeugt von $\mathbf{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{22}, \text{vol}$. Zusatzvoraussetzungen an X finden sich ggf. am Anfang der jeweiligen Kapitel bzw. Abschnitte.

Das Hilbertschema

1. Einführung

Wir geben einen kurzen Überblick über die grundlegenden Definitionen und Sätze über Hilbertschemata. Eine detailliertere Beschreibung findet sich unter anderem bei Lehn [17], Nakajima [19] und Ellingsrud, Göttsche [5].

SATZ 2.1 (Grothendieck [11]). *Es sei X ein (quasi-)projektives Schema über \mathbb{C} . Der Funktor*

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hilb}}^n(X) : \mathbf{Shm}^{op} &\rightarrow \mathbf{Set}, \quad T \mapsto \{Z \subset T \times X \mid * \} \\ * &= Z \text{ endlich über } T, \text{pr}_{2*}(\mathcal{O}_Z) \text{ lokalfrei vom Rang } n \end{aligned}$$

wird dargestellt durch ein (quasi-)projektives Schema $X^{[n]}$. Das heißt, für alle Schemata T über \mathbb{C} haben wir einen natürlichen Isomorphismus (von Mengen):

$$\text{Hom}_{\mathbf{Shm}}(T, X^{[n]}) \cong \underline{\text{Hilb}}^n(X)(T).$$

$X^{[n]}$ heißt das Hilbertschema von n Punkten auf X .

Der Name erklärt sich aus folgender Beobachtung: Die geometrischen Punkte von $X^{[n]}$ entsprechen genau den endlichen Unterschemata von X der Länge n . Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} X^{[n]}(\mathbb{C}) &:= \text{Hom}_{\mathbf{Shm}}(\text{Spec}(\mathbb{C}), X^{[n]}) \\ &= \{Z \subset X \mid \dim(Z) = 0, \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}^0(X, \mathcal{O}_Z)) = n\}. \end{aligned}$$

Seien $x_1, \dots, x_n \in X(\mathbb{C})$ paarweise verschieden, dann ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ mit der reduzierten Unterschemastruktur ein nulldimensionales Unterschema der Länge n . Ist X eine Fläche, so liegen Punkte dieser Form dicht in $X^{[n]}$. Falls X projektiv, so ist $X^{[n]}$ also eine Kompaktifizierung des Zustandsraumes aller ungeordneten n -Tupel.

In $\text{Hom}(X^{[n]}, X^{[n]})$ gibt es ein ausgezeichnetes Element: die Identität. Diesem entspricht ein Unterschema: $\Xi_n \subset X^{[n]} \times X$, die universelle Familie. Als Menge gilt:

$$\Xi_n = \{(A, x) \mid x \in \text{supp}(A)\}.$$

Jeder Morphismus $f \in \text{Hom}(T, X^{[n]})$ faktorisiert über die Identität auf $X^{[n]}$. Dazu korrespondiert die Aussage, dass jedes Unterschema $Z \subset T \times X$, das die Eigenschaften aus 2.1 erfüllt, als Faserprodukt von Ξ_n entlang f dargestellt werden kann. Wir haben damit das folgende Lemma bewiesen:

LEMMA 2.2. *Für alle $Z \subset T \times X$ so, dass Z endlich über T und $\text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_Z)$ lokalfrei vom Rang n , gibt es genau einen Morphismus $f : T \rightarrow X^{[n]}$ mit der Eigenschaft, dass $Z \cong f_X^{-1}(\Xi)$, $f_X := f \times \text{id}_X$.*

SATZ 2.3 (Fogarty [6]). *Sei X eine glatte, zusammenhängende, quasiprojektive Fläche. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Hilbertschema $X^{[n]}$ glatt, zusammenhängend und $2n$ -dimensional.*

2. Die kleine Diagonale

Sei nun X eine glatte, quasiprojektive Fläche über \mathbb{C} . Wir wollen uns zunächst einen Überblick über die (abgeschlossenen) Punkte von $X^{[3]}$ verschaffen. Ist A ein nulldimensionales Unterschema mit Träger $\{x_1, \dots, x_k\}$, so addieren sich die Längen von A_{x_i} zur Länge von A auf. Wir sortieren nach Kardinalität von $\text{supp}(A)$:

- # $\text{supp}(A) = 3$: Nur das reduzierte Unterschema mit Träger $\text{supp}(A)$ hat Länge 3.
- # $\text{supp}(A) = 2$: Ohne Einschränkung sei A_y reduziert. A_x ist ein Unterschema der Länge 2. Dieses wird durch die Einbettung seines Tangentialraums in T_X eindeutig festgelegt. Es gilt $\mathcal{O}_{A,x} \cong \mathbb{C}[x]/(x^2)$.
- # $\text{supp}(A) = 1$: Schemata dieses Typs nennen wir *konzentriert*. Wir unterscheiden zwei Typen: Die *kurvilinearen Punkte* sind Keime glatter Kurven. Für diese gilt: $\mathcal{O}_A \cong \mathbb{C}[x, y]/(x, y)^3 + (x^2 - y)$. Die *fetten Punkte* haben Koordinatenring $\mathcal{O}_A \cong \mathbb{C}[x, y]/(x, y)^2$.

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass die Menge aller fetten Punkte ein abgeschlossenes Unterschema δ in $X^{[3]}$ bildet: die *kleine Diagonale*. Außerdem konstruieren wir einen Isomorphismus: $X \rightarrow \delta$, der als Abbildung von Mengen durch die Zuordnung $x \mapsto V(\mathfrak{m}_x^2)$ gegeben ist.

Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist ein abgeschlossenes Unterschema, die assoziierte Idealgarbe bezeichnen wir mit \mathcal{I}_Δ . Ein weiteres abgeschlossenes Unterschema Δ^2 wird durch \mathcal{I}_Δ^2 definiert. Die Faser der Projektion über einem (abgeschlossenen) Punkt $x \in X$ ist gegeben durch $V(\mathfrak{m}_x^2) \subset X$. Da X Dimension 2 hat, ist dies ein Unterschema der Länge 3.

LEMMA 2.4. *Die Einschränkung der Projektion $p := \text{pr}_1|_{\Delta^2} : \Delta^2 \rightarrow X$ ist endlich. $p_*(\mathcal{O}_{\Delta^2})$ ist lokalfrei vom Rang 3. $\Delta^2 \subset X \times X$ induziert daher eine Abbildung: $\delta : X \rightarrow X^{[3]}$.*

BEWEIS. Die Inklusion $\Delta \subset \Delta^2$ induziert eine exakte Sequenz auf Δ^2 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Delta, \Delta^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta^2} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0.$$

Es gilt nun $\mathcal{I}_{\Delta, \Delta^2} = \mathcal{I}_\Delta / \mathcal{I}_\Delta^2 = \Delta_*(\Omega_X)$ nach Definition von Ω_X . Die Fasern der Projektion auf den ersten Faktor $p := \text{pr}_1|_{\Delta^2}$ bestehen aus einem (nicht reduzierten) Punkt. In diesem Falle ist p_* nach ([12], III, 11) exakt. Wir erhalten eine exakte Sequenz auf X :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{\Delta^2}) \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_\Delta) \longrightarrow 0.$$

Da $\mathcal{O}_\Delta = \Delta_*(\mathcal{O}_X)$ ist, gilt $p_*(\mathcal{O}_\Delta) = \mathcal{O}_X$. Nun ist Ω_X lokalfrei, da X glatt. Nach dem nächsten Lemma ist in dieser Situation $p_*(\mathcal{O}_{\Delta^2})$ lokalfrei vom Rang $2 + 1 = 3$. Für eine offene affine Menge $U \subset X$ faktorisiert $p^{-1}(U) \hookrightarrow X \times X$ über $U \times U \hookrightarrow X \times X$. Somit ist p ein affiner Morphismus. Zusammen mit $p_*(\mathcal{O}_{\Delta^2})$ kohärent folgt p endlich. \square

LEMMA 2.5. *Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei M ein R -Modul und*

$$0 \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow R^m \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann ist M frei vom Rang $n + m$.

BEWEIS. R^m ist frei also projektiv. Somit spaltet die Sequenz und $M \cong R^n \oplus R^m = R^{n+m}$. \square

LEMMA 2.6. $\delta : X \rightarrow X^{[3]}$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

BEWEIS. Fette Punkte $A \in X^{[3]}$ lassen sich durch die Eigenschaft $\Omega_A(p) = \Omega_X(p)$ oder äquivalent $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_A(p) \geq 2$ für $p \in \text{supp}(A)$ charakterisieren. Sei $\Xi_3 \subset X \times X^{[3]}$ die universelle Familie. Die relative Kotangentialgarbe $\Omega_{\Xi_3/X}$ hat die Eigenschaft, dass $\Omega_{\Xi_3/X}(A, p) = \Omega_A(p)$ für alle $(A, p) \in X^{[n]} \times X$. Es sei

$$D := \text{pr}_2(\{(A, p) \mid \dim \Omega_{\Xi_3/X}(A, p) \geq 2\}).$$

Nach ([12], III, 12) ist dies ein abgeschlossenes Unterschema. Wir geben D die reduzierte Schemastruktur. $\delta : X \rightarrow X^{[3]}$ faktorisiert über D , da für alle $x \in X$ gilt: $\dim(\Omega_{\Xi_3/X}(\delta(x))) = \dim(\Omega_{\Delta^2/X}(x, x)) = 2$.

Wir wollen nun zeigen: $\delta : X \rightarrow D$ ist ein Isomorphismus. Als Menge ist diese Aussage klar. Um die Aussage für Schemata zu gewinnen, konstruieren wir eine Inverse: Betrachte den Hilbert-Chow Morphismus (vgl. [17])

$$\rho : X^{[3]} \rightarrow S^3 X, \quad A \mapsto \sum_{x \in X} \text{Länge}(\mathcal{O}_{A,x}) \cdot x$$

in das Symmetrische Produkt $S^n X = X^n / \mathfrak{S}_n$. Die Einschränkung von ρ auf D faktorisiert über die Diagonaleinbettung $X \rightarrow S^3 X$, $x \mapsto 3x$. Wir erhalten einen Morphismus $r : D \rightarrow X$, der invers zu δ als Abbildung von Mengen ist. Aus dem nächsten Lemma folgt: δ ist ein Isomorphismus. \square

LEMMA 2.7. Seien X reduziert (separiert und von endlichem Typ über \mathbb{C}), $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ Morphismen mit $g \circ f = \text{id}_X$ als Abbildung von Mengen, dann ist $g \circ f = \text{id}_X$ als Morphismus von Schemata.

BEWEIS. Betrachte den Morphismus:

$$d := (\text{id}_X, g \circ f) : X \rightarrow X \times X.$$

Nach Voraussetzung bildet d abgeschlossene Punkte in die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ab. X ist von endlichem Typ über \mathbb{C} , daher werden auch alle generischen Punkte von X nach Δ abgebildet. d faktorisiert also über Δ als Abbildung topologischer Räume. Da X reduziert ist, faktorisiert d auch als Abbildung von Schemata (vgl. [10], 5.2.2). Das ist aber äquivalent zu $g \circ f = \text{id}_X$. \square

3. Schnittmultiplizitäten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit $(\mathbb{C}^2)^{[3]}$. Seien $C := \mathbb{C} \times \{0\}$ und $D := \{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ die beiden Koordinatenachsen.

SATZ 2.8. Seien \mathfrak{C} und \mathfrak{D} die reduzierten Untervarietäten von $(\mathbb{C}^2)^{[3]}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{C} := \{A \in (\mathbb{C}^2)^{[3]} \mid 0 \in \text{supp}(A)\}$$

und

$$\mathfrak{D} := \{\{a, b, c\}_{\text{red}} \subset X \mid a \in C, b \in D, c \in \mathbb{C}^2, a, b, c \text{ verschieden}\}^{-\text{Zariski}}.$$

Es gilt:

$$\int [\mathfrak{C}].\delta = 3 \quad \text{und} \quad \int [\mathfrak{D}].\delta = 6.$$

DEFINITION 2.9. Sei $Z \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Setze:

$$Z^u := \text{pr}_2^{-1}(Z) \cap \Xi_n = \{(A, x) \mid x \in Z, x \in \text{supp}(A)\} \subset X^{[n]} \times X.$$

Die Projektion von Ξ_n auf $X^{[n]}$ ist eigentlich, daher ist das Bild

$$Z^d := \text{pr}_1(\text{pr}_2^{-1}(Z) \cap \Xi_n) = \{A \mid \exists x \in Z, x \in \text{supp}(A)\}$$

ein abgeschlossenes Unterschema von $X^{[n]}$.

BEWEIS VON SATZ 2.8. \mathfrak{C} und \mathfrak{D} sind Untervarietäten der Dimension vier. δ hat Dimension zwei. Der mengentheoretische Schnitt mit δ ist der Punkt $V(\mathfrak{m}_0^2)$ und hat somit die erwartete Dimension. Es reicht damit die Schnittmultiplizität, d.h. die Länge des Koordinatenringes auszurechnen.

Mit den Bezeichnungen aus (2.9) ist $\mathfrak{C} = \{0\}^d$ und es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} C^d \cap D^d &= \{A \mid \exists a, b \in \text{supp}(A) : a \in C, b \in D\} \\ &= \{\{a, b, c\}_{\text{red}} \subset X \mid a \in C, b \in D, c \in \mathbb{C}^2, a, b, c \text{ verschieden}\}^- \\ &\quad \cup \{A \in (\mathbb{C}^2)^{[3]} \mid 0 \in \text{supp}(A)\} \\ &= \mathfrak{D} \cup \mathfrak{C} \end{aligned}$$

Der Schnitt $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ ist gegeben durch

$$\{\{0, a, b\} \mid a \in C \cup D, b \in \mathbb{C}^2, 0, a, b \text{ verschieden}\}^-$$

und hat Dimension 3. Wir schließen

$$(2.1) \quad \mathfrak{D} = ((C^d \cap D^d) \setminus \mathfrak{C})^-.$$

Wir wollen nun explizit Gleichungen für \mathfrak{D} und \mathfrak{C} angeben.

Haben wir Gleichungen für Ξ_3 und Z aus (2.9) gegeben, können wir Z^u explizit berechnen. Das Bild Z^d unter der Projektion auf den ersten Faktor erhält man durch Elimination der Koordinaten von X aus den Gleichungen für Z^u .

Sind I, J zwei Ideale eines Ringes R , so ist $(V(I) \setminus V(J))^-$ assoziiert zum Idealquotient: $I : J = \{r \in R \mid rJ \subset I\}$. Aus (2.1) erhalten wir also auch eine explizite Beschreibung von \mathfrak{D} .

Eine affine Umgebung U des Punktes $V(\mathfrak{m}_0^2) \in (\mathbb{C}^2)^{[3]}$ ist der Deformationsraum der endlichen $\mathbb{C}[x, y]$ -Algebra $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{m}_0^2$. Unter Zuhilfenahme des Computer Algebra Systems Singular ([20]) berechnen wir:

$$U = \text{Spec}(\mathbb{C}[A, B, C, D, x_0, y_0]).$$

Die Inklusion nach $(\mathbb{C}^2)^{[3]}$ wird durch die Familie $\Xi = V(I) \subset U \times \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} I &= (\bar{y}^2 + (A\bar{x} + B\bar{y}) + 2(AC - B^2) \\ &\quad - \bar{x}\bar{y} + (B\bar{x} + C\bar{y}) + (AD - BC) \\ &\quad \bar{x}^2 + (C\bar{x} + D\bar{y}) + 2(BD - C^2)) \end{aligned}$$

$\bar{x} := x - x_0, \bar{y} := y - y_0$ beschrieben.

Die kleine Diagonale wird in diesen Koordinaten durch die Gleichung $A = B = C = D = 0$ gegeben. Für $\mathfrak{C} = \{0\}^d$ berechnet man:

$$\begin{aligned} \{0\}^u &= V(I + (x, y)) \\ &= V(x, y, \\ &\quad y_0^2 - (Ax_0 + By_0) + 2(AC - B^2), \\ &\quad -x_0y_0 - (Bx_0 + Cy_0) + (AD - BC), \\ &\quad x_0^2 - (Cx_0 + Dy_0) + 2(BD - C^2)) \end{aligned}$$

Man entnimmt dieser Darstellung leicht, dass das Bild unter der Projektion auf $(\mathbb{C}^2)^{[3]}$ durch die drei letzten Gleichungen beschrieben wird. Der Schnitt mit δ ist also

$$V(x_0^2, x_0y_0, y_0^2, A, B, C, D)$$

und hat Länge 3.

Für \mathfrak{D} sind die Rechnungen etwas aufwendiger. Wir verwenden wieder Singular (4), um Gleichungen für die Varietäten

$$C^d = V(2C^3 - 3BCD + AD^2 + 3C^2x_0 - 3BDx_0 - x_0^3)$$

und

$$D^d = V(2B^3 - 3ABC + A^2D + 3B^2y_0 - 3ACy_0 - y_0^3)$$

zu bestimmen. Es bezeichne J das von diesen Polynomen erzeugte Ideal. Wir müssen nun den Idealquotienten $J : I_{\mathfrak{D}}$ bestimmen. Dieser wird erzeugt von:

$$\begin{aligned} & 2C^3 - 3BCD + AD^2 + 3C^2x_0 - 3BDx_0 - x_0^3, \\ & 2BC^2 - B^2D - ACD + BCx_0 - ADx_0 - Bx_0^2 \\ & \quad + 2C^2y_0 - 2BDy_0 + Cx_0y_0 - x_0^2y_0 - Dy_0^2, \\ & 2B^2C - AC^2 - ABD + 2B^2x_0 - 2ACx_0 - Ax_0^2 \\ & \quad + BCy_0 - ADy_0 + Bx_0y_0 - Cy_0^2 - ay_0^2, \\ & 2B^3 - 3ABC + A^2D + 3B^2y_0 - 3ACy_0 - y_0^3 \end{aligned}$$

Damit wird der Schnitt mit δ durch

$$x_0^3, x_0^2y_0, x_0y_0^2, y_0^3, A, B, C, D$$

gegeben und hat Länge 6. □

4. Anhang: Singular Quelltext

```
LIB "elim.lib";
LIB "deform.lib";
LIB "primdec.lib";

ring R=0,(x,y),dp;
ideal m = x2,xy,y2;

// universelle Deformation ausrechnen:
list L=versal(std(m));
def S = L[1];

setring(S);
ideal txi = Fs;
// Beschreibt die universelle Familie im "Schwerpunktsystem".

// Eine äquivalente, symmetrische Form der Gleichungen:
ideal txi =
  y2+(Ax+By) + 2*(AC-B2),
  -xy+(Bx+Cy)+(AD-BC),
  x2 +(Cx+Dy) +2*(BD-C2);

// Erweitere Basisring um "Schwerpunkt Koordinaten":
execute("ring T=0,(" + varstr(S) + ",a,b),dp;");

// Universelle Familie aus S
ideal xi = fetch(S,txi);
xi = subst(xi,x,x-a);
xi = subst(xi,y,y-b);
```

```
// unsere Varietäten:
ideal C_u = x + xi; // = { (W,x) | x \in supp(W) x \in C }
ideal D_u = y + xi; // = { (W,x) | x \in supp(W) x \in D }
ideal Z0_u = x,y +xi; // = { (W,0) | 0 \in supp(W) }

// Die Projektionen auf Hilb3:
ideal C_d = elim1(C_u,xy);
ideal D_d = elim1(D_u,xy);
ideal IC = elim1(Z0_u,xy);

// Entferne die Schemata mit 0 im Träger:
ideal ID = quotient(C_d+D_d, IC);

// Koordinaten der Fläche:
ideal base = x,y;

// die kleine Diagonale
ideal Di = A,B,C,D;

// Berechnung der Längen:
vdim(std(Di+base+IC));
vdim(std(Di+base+ID));
```

KAPITEL 3

Die Kohomologie des Hilbertschemas

GENERALVORAUSSETZUNG 3.1. In diesem Kapitel sei X eine einfach zusammenhängende, glatte, projektive Fläche. Insbesondere gilt: $H^1(X) = H^3(X) = 0$.

1. Die Kohomologie als Vektorraum

Die Bettizahlen des Hilbertschemas sind durch folgende Formel gegeben.

SATZ 3.2 (Göttsche [7]).

$$(3.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{4n} b_i(X^{[n]}) p^{i-2n} q^n = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=0}^4 \left(\frac{1}{1 - p^{j-2} q^m} \right)^{b_j(X)}$$

BEISPIEL 3.3. Die Bettizahlen von $H^*(X^{[3]})$ sind:

$$b_0 = 1, b_2 = 23, b_4 = 299, b_6 = 2554, b_8 = 299, b_{10} = 23, b_{12} = 1$$

BEMERKUNG 3.4. Setzen wir $p = 1$ erhalten wir eine Formel für $\dim(H(X^{[n]}))$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(H(X^{[n]})) q^n = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - q^m} \right)^{\dim(H(X))}$$

Damit ist die Vektorraumstruktur von $H^*(X^{[3]})$ bereits eindeutig festgelegt. Das alleine ist natürlich noch nicht sehr viel wert. Wir werden im Folgenden eine Operation der Heisenberg-Algebra auf der Gesamtkohomologie aller Hilbertschemas definieren. Zum einen ist diese Operation geometrisch, das heißt wir erhalten eine Basis aus Fundamentalklassen explizit gegebener Untervarietäten. Zum anderen erlaubt diese Zusatzstruktur die Berechnung der Schnitt-Paarung und sogar des gesamten Cup-Produkts (siehe [16]).

Die Formel von Göttsche legt es nahe, nicht $X^{[n]}$ einzeln zu betrachten, sondern den Vektorraum:

$$(3.2) \quad \mathbb{H} := \mathbb{H}(X) := \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i=0}^{4n} H^i(X^{[n]}, \mathbb{C})$$

Wir erhalten eine Bigraduierung auf \mathbb{H} indem wir einem Element $u \in H^i(X^{[n]}, \mathbb{C})$ Bigrad (n, i) geben. Dabei heißt n das *Gewicht* und i der (*kohomologische*) *Grad*. Es gilt $X^{[0]} = \{\emptyset \subset X\} \cong \{pt.\}$ und damit $H(X^{[0]}) = \mathbb{C}$. Den Erzeuger mit Integral 1 bezeichnen wir mit $|0\rangle \in H(X^{[0]}) \subset \mathbb{H}$.

2. Die Nakajimaoperatoren

Seien $n, i > 0$ zwei natürliche Zahlen. Die Inzidenzvarietät:

$$\Xi_{n,i} := \{(A, x, B) \in X^{[n]} \times X \times X^{[n+i]} \mid A \subset B, \text{supp}(\mathcal{I}_A/\mathcal{I}_B) = \{x\}\}.$$

definiert eine Korrespondenz:

$$\begin{array}{ccc}
& X^{[n]} \times X \times X^{[n+i]} & \\
\text{pr}_{12} \swarrow & & \searrow \text{pr}_3 \\
X^{[n]} \times X & & X^{[n+i]}
\end{array}$$

DEFINITION 3.5. Für eine ganze Zahl $i \in \mathbb{Z}$ und eine Klasse $u \in \mathbb{H}(X)$ definieren wir den *Nakajima-Operator* $q_i[u] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ in dem wir für $i \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{H}(X^{[n]})$ setzen:

$$u_i \alpha := q_i[u] \alpha := \text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n,i}]) \in \mathbb{H}(X^{[n+i]})$$

und

$$u_{-i} \alpha := q_{-i}[u] \alpha := (-1)^i \text{pr}_{1*}(\text{pr}_3^*(\alpha) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n-i,i}]) \in \mathbb{H}(X^{[n-i]}).$$

Beachte, dass $\Xi_{n,0} = \emptyset$ und daher $q_0[u] = 0$ für alle $u \in \mathbb{H}(X)$.

BEMERKUNG 3.6. Die Abbildung $q_i[\cdot] : \mathbb{H}(X) \rightarrow \text{End}(\mathbb{H})$ ist linear.

Die Nakajima-Operatoren sind verträglich mit der Bigraduierung. Ist $u \in \mathbb{H}^k(X)$ ein homogenes Element, so ist $q_i[u]$ homogen vom Gewicht i und Grad $k + 2(i - 1)$.

BEWEIS. ¹ Die einzige nicht triviale Aussage ist $\deg(q_i[u]) = k + 2(i - 1)$. Dazu berechnen wir die Dimension von $\Xi_{n,i}$. Wir zerlegen $\Xi_{n,i}$ nach der Länge von $\mathcal{O}_{A,x}$: $\Xi_{n,i} = Z_0 \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_n$, $Z_i := \{(A, B, x) \in \Xi_{n,i} \mid \dim \mathbb{H}^0(\mathcal{O}_{A,x}) = i\}$. Wir betrachten die Projektion von Z_0 auf $X^{[n]}$. Ein generisches Element der Faser über einem Punkt $A \in X^{[n]}$ erhält man durch Hinzufügen eines in $x \in X \setminus \text{supp}(A)$ konzentrierten Schemas der Länge i . Nach Briançon ([3]) ist der Modulraum solcher Schemata $(i - 1)$ -dimensional. Z_0 hat also Dimension $2n + 2 + (i - 1) = 2n + i + 1$.

Für $Z_i, i \geq 1$ müssen wir $x \in \text{supp}(A)$ wählen. Die Dimension ist daher echt kleiner der von Z_0 . Diese Komponenten tragen somit nicht zur Fundamentalklasse von $\Xi_{n,i}$ bei.

Es gilt also $[\Xi_{n,i}] \in \mathbb{H}^{4n+2i+2}(X^{[n]} \times X^{[n+i]} \times X)$. Die Pullback Abbildungen pr_1^* und pr_2^* sind graderhaltend. Der Grad von pr_{3*} ist die negative reelle Faserdimension $-4n - 4$. Insgesamt also: $\deg(q_i[u]) = k + (4n + 2i + 2) - 4n - 4 = k + 2(i - 1)$. \square

SATZ 3.7 (Nakajima [18]). Seien $i, j \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{H}(X)$. Es gilt

$$(3.3) \quad [q_i[u], q_j[v]] = q_i[u]q_j[v] - q_j[v]q_i[u] = i \delta_{i+j} q(u, v) \text{id}_{\mathbb{H}}.$$

Dabei ist $\delta_i = \delta_{i,0}$ das Kronekersymbol. Insbesondere kommutieren q_i und q_j sobald i und j dasselbe Vorzeichen haben.

DEFINITION 3.8. Sei $\underline{n} = (n_1, \dots, n_k)$ ein Tupel natürlicher Zahlen, $u \in \mathbb{H}(X)$ eine Kohomologiekategorie. Es bezeichne $m_k : \mathbb{H}(X)^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{H}(X)$ die k -fache Multiplikation, m_k^* die Adjungierte bezüglich der Cup-Produkt-Paarung $(a, b) \mapsto \int a \cdot b$. Wir definieren den verallgemeinerten Nakajimaoperator $u_{\underline{n}} := q_{\underline{n}}[u]$ als die Komposition:

$$\mathbb{H}(X) \xrightarrow{m_k^*} \mathbb{H}(X)^{\otimes k} \xrightarrow{q_{n_1} \otimes \dots \otimes q_{n_k}} (\text{End}(\mathbb{H}))^{\otimes k} \xrightarrow{\text{Komposition}} \text{End}(\mathbb{H}).$$

3. Fockraum und Heisenberg-Algebra

Wir konstruieren nun eine Beschreibung von \mathbb{H} als Modul über der Heisenberg-Algebra.

DEFINITION 3.9. Sei V, q ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form q .

Die *Heisenbergalgebra* über V ist die assoziative Algebra:

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}(V) := T(V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) / R$$

¹Vergleiche dazu Nakajima [19].

dabei ist (T, \cdot, \mathbf{e}) die Tensoralgebra und R das von den Elementen:

$$(u \otimes t^i) \cdot (v \otimes t^j) - (v \otimes t^j) \cdot (u \otimes t^i) - i\delta_{i+j}q(u, v)\mathbf{e}$$

$i, j \in \mathbb{Z}$, $u \in V$ erzeugte, zweiseitige Ideal von T . Setze für $v \in V$ und $i \in \mathbb{Z}$: $q_i[v] := v_i := v \otimes t^i \in \mathbb{S}$.

Der *Fockraum* über V ist der Vektorraum:

$$\mathbb{F} := \mathbb{F}(V) := \text{Sym}(V \otimes t\mathbb{C}[t])$$

Dabei bezeichnet Sym die symmetrische Algebra. Das Bild von $1 \in \mathbb{C}$ unter dem natürlichen Isomorphismus $\text{Sym}^0(V) = \mathbb{C}$ heißt *Vakuumvektor* und wird mit $|0\rangle$ bezeichnet.

BEMERKUNG 3.10. \mathbb{F} wird ein \mathbb{S} -Modul vermöge:

$$\begin{aligned} i > 0 & : q_i[v](u \otimes t^j) := (v \otimes t^i) \cdot (u \otimes t^j) \\ & q_0[v](u \otimes t^j) := 0 \\ i < 0 & : q_i[v](u \otimes t^j) := -i\delta_{i-j}q(u, v)|0\rangle \end{aligned}$$

Die dritte Bedingung folgt schon aus der Forderung: $\forall i \leq 0 : q_{-i}[u]|0\rangle = 0$.

BEMERKUNG 3.11. In \mathbb{S} gilt:

$$[q_i[u], q_j[v]] = i\delta_{i+j}q(u, v)\text{id}_{\mathbb{S}}.$$

BEMERKUNG 3.12. Sei b_1, \dots, b_N eine Basis von V . Dann ist:

$$\{q_{i_1}[b_{j_1}] \dots q_{i_l}[b_{j_l}]|0\rangle \mid l \in \mathbb{N}_0, i_1, j_1, \dots, i_l, j_l \in \mathbb{N}\}$$

eine Basis von \mathbb{F} . □

Der Vektorraum \mathbb{F} ist graduiert: Das Gewicht eines Elementes $(v_1 \otimes t^{i_1}) \dots (v_k \otimes t^{i_k}) \in \mathbb{F}$ setzen wir auf $\sum_{l=1}^k i_l$. Im Falle, dass V selbst graduiert ist (z.B. $V = \mathbb{H}^*(X)$), trägt \mathbb{F} eine weitere Graduierung. Diese ist eindeutig festgelegt durch die Forderung, dass $|0\rangle$ den Grad 0 trägt und für $u \in \mathbb{H}^d(X)$ der Endomorphismus $q_i[v]$ den Grad um $d - 2(i - 1)$ hat.

BEMERKUNG 3.13. Sei \mathbb{F}_n der Gewicht- n Anteil von \mathbb{F} . Aus der Definition von \mathbb{F} entnimmt man:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dim(\mathbb{F}_n) t^i = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^m} \right)^{\dim V}.$$

LEMMA 3.14. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus:*

$$\mathbb{F}_n \cong \bigoplus_{\nu} \bigotimes_{j=1}^{k(\nu)} \text{Sym}^{\nu_j}(V)$$

wobei die Summe über alle Partitionen $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ von $\sum_i i\nu_i = n$ läuft. ²

BEWEIS. Die Basis aus (3.12) ist mit der Gewichtsgraduierung verträglich. Um ein Element vom Gewicht n zu erhalten, muss gelten: $i_1 + \dots + i_l = n$. Da alle auftretenden Operatoren kommutieren (3.11), können wir annehmen, dass $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l$ gilt. Bei Gleichheit bleibt die Reihenfolge der auftretenden Operatoren unbestimmt. Es ergibt sich die Aussage. □

BEMERKUNG 3.15. Der in (3.2) definierte Vektorraum \mathbb{H} trägt eine kanonische $\mathbb{S}(\mathbb{H}(X))$ -Modul Struktur. Für $u \in \mathbb{H}(X)$, $i \in \mathbb{Z}$ ist die Operation der $q_i[u] \in \mathbb{S}$ durch die gleichnamigen Nakajimaoperatoren $q_i[u] \in \text{End}(\mathbb{H})$ gegeben.

²Achtung: ν_i bezeichnet also die Häufigkeit, mit der der Summand i auftritt.

SATZ 3.16 (Nakajima). *Es gibt Isomorphismus von $\mathbb{S}(\mathbb{H}(X))$ -Moduln:*

$$(3.4) \quad \mathbb{F}(\mathbb{H}(X)) \cong \mathbb{H}(X).$$

Dieser ist durch die Forderung $|0\rangle \mapsto 1_{X^{[0]}} \in \mathbb{C} = \mathbb{H}^0(X^{[0]})$ eindeutig festgelegt und respektiert die Bigraduierung.

BEWEIS. Aus der Forderung $|0\rangle \mapsto 1_{X^{[0]}}$ folgt sofort, dass $q_{i_1}[u_1] \dots q_{i_n}[u_n] \cdot |0\rangle \mapsto q_{i_1}[u_1] \dots q_{i_n}[u_n] \cdot 1_{X^{[0]}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $u_i \in \mathbb{H}^*(X)$. Da \mathbb{F} von diesen Elementen erzeugt wird, erhalten wir eine Abbildung. Diese ist injektiv, da \mathbb{F} irreduzibel ist (vgl. [17]). Beide Moduln haben nach der Formel von Göttsche (3.2) komponentenweise dieselbe Dimension. Es folgt die Surjektivität. \square

Wir werden ab sofort Elemente von $\mathbb{H}(X)$ und $\mathbb{F}(\mathbb{H}(X))$ nicht mehr unterscheiden.

NOTATION 3.17. Um die Formeln besser lesbar zu halten, fassen wir je nach Kontext Elemente von \mathbb{S} durch Wirkung auf das Vakuum als Elemente von \mathbb{F} auf. Zum Beispiel steht $\mathbf{1}_2 \gamma_1^i$ für $q_2[\mathbf{1}] q_1[\gamma^i] |0\rangle$.

Um die Komposition von Operatoren $u_i v_i$ von dem Cup-Produkt der Kohomologieklassen $u_i \cdot v_i = u_i |0\rangle \cdot v_i |0\rangle$ unterscheiden zu können, notieren wir letzteres immer mit einem Punkt. Schwierigkeiten können höchstens bei der Verwendung von Exponenten auftreten: Die Potenz u_i^k steht immer für die iterierte Komposition des Operators angewendet auf das Vakuum $(q_i[u])^k |0\rangle$. Die Klasse $q_i[u^k] |0\rangle$ notieren wir abkürzend mit $(u^k)_i$ oder etwas konsistenter mit $(u^k)_i$. Analog steht $(u_i)^k$ für das iterierte Cup-Produkt: $(q_i[u] |0\rangle) \cdot \dots \cdot (q_i[u] |0\rangle)$.

Eine Ausnahme bilden dabei die Klassen $\gamma^i \in \mathbb{H}(X)$ aus unserer Basis. Diese sind natürlich nicht die Potenzen einer Klasse $\gamma \in \mathbb{H}(X)$. Wir verzichten daher bei $(\gamma^i)_k$ auf die Klammer.

BEISPIEL 3.18. Die Kohomologie von $X^{[3]}$ ist nach (3.16) der Gewicht-3 Anteil in $\mathbb{F}(\mathbb{H}(X))$. Dieser wird nach (3.12) aufgespannt von den Elementen:

$$\begin{aligned} q_1[v_1] q_1[v_2] q_1[v_3] |0\rangle \\ q_2[v_1] q_1[v_2] |0\rangle \\ q_3[v_1] |0\rangle \end{aligned}$$

wobei die v_i die Basis $(\mathbf{1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{22}, \text{vol})$ von $\mathbb{H}(X)$ durchlaufen. Eliminieren wir doppelt vorkommende Vektoren, erhalten wir eine Basis:

(kohom.) Grad	$\mathbb{H}(X)$	$\mathbb{H}(X)^{\otimes 2}$	$\text{Sym}^3(\mathbb{H}(X))$
12			vol_1^3
10		$\text{vol}_2 \text{vol}_1$	$\text{vol}_1^2 \gamma_1^i$
8	vol_3	$\text{vol}_2 \gamma_1^i, \gamma_2^i \text{vol}_1$	$\text{vol}_1^2 \mathbf{1}_1, \text{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j$
6	γ_3^i	$\text{vol}_2 \mathbf{1}_1, \gamma_2^i \gamma_1^j, \mathbf{1}_2 \text{vol}_1$	$\text{vol}_1 \gamma_1^i \mathbf{1}_1, \gamma_1^i \gamma_1^j \gamma_1^k$
4	$\mathbf{1}_3$	$\gamma_2^i \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2 \gamma_1^i$	$\text{vol}_1 \mathbf{1}_1^2, \gamma_1^i \gamma_1^j$
2		$\mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1$	$\gamma_1^i \mathbf{1}_1^2$
0			$\mathbf{1}_1^3$

i, j und k laufen hierbei von 1 bis 22. Wir haben die Notation $u_i = q_i[u]$ und die Konventionen aus (3.17) verwendet.

4. Die Cup-Produkt-Paarung

Die Nakajimaoperatoren erlauben nicht nur die Kohomologie als Vektorraum zu beschreiben. Auch die Schnittpaarung kann man aus ihnen gewinnen.

DEFINITION 3.19. Die *Schnittpaarung* auf \mathbb{H} ist die symmetrische Bilinearform $(-, -)$, die auf homogenen Elementen $\alpha \in \mathbb{H}(X^{[n]})$, $\beta \in \mathbb{H}(X^{[m]})$ gegeben ist durch:

$$(\alpha, \beta) := \delta_{n,m} \int_{X^{[n]}} \alpha \cdot \beta$$

LEMMA 3.20. Seien $\alpha \in \mathbb{H}(X^{[n]})$, $\beta \in \mathbb{H}(X^{[n+i]})$, $u \in \mathbb{H}(X)$. Es gilt

$$(-1)^i \int_{X^{[n]}} \alpha \cdot q_{-i}[u] \beta = \int_{X^{[n]}} (q_i[u] \alpha) \cdot \beta.$$

Mit anderen Worten $q_i[u]$ und $(-1)^i q_{-i}[u]$ sind adjungierte Operatoren bzgl. $(-, -)$.

BEWEIS. Dies ist ein bekanntes Resultat über Korrespondenzen, siehe z.B. [8]. Für $i > 0$ gilt nach Definition von $q_i[u]$ und Projektionsformel:

$$\begin{aligned} (-1)^i \int_{X^{[n]}} \alpha \cdot q_{-i}[u] \beta &= \int_{X^{[n]}} \alpha \cdot \text{pr}_{1*}(\text{pr}_3^*(\beta) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n-i,i}]) \\ &= \int_{X^{[n]}} \text{pr}_{1*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_3^*(\beta) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n-i,i}]) \\ &= \int_{X^{[n]} \times X^{[n+i]} \times X} \text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_3^*(\beta) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n-i,i}]. \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \int_{X^{[n]}} (q_i[u] \alpha) \cdot \beta &= \int_{X^{[n]}} \text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n,i}]) \cdot \beta \\ &= \int_{X^{[n]}} \text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_3^*(\beta) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n,i}]) \\ &= \int_{X^{[n]} \times X^{[n+i]} \times X} \text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_3^*(\beta) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n,i}]. \quad \square \end{aligned}$$

Das Integral über zwei Klassen komplementären Grades kann man nun bestimmen, indem man diese zunächst als Polynom in den positiven Nakajima Operatoren, angewendet auf das Vakuum $|0\rangle$, schreibt. Danach kann man mit Hilfe des Lemmas und der Kommutatorregel (3.7) erreichen, dass nur noch negative Operatoren auf das Vakuum wirken.

BEMERKUNG 3.21. Der kanonischen Isomorphismus $X^{[1]} \cong X$ wird auf der Kohomologie durch die Abbildung: $u \mapsto q_1[u] |0\rangle$ realisiert. Es gilt also insbesondere: $(q_1[u] |0\rangle, q_1[v] |0\rangle) = q(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{H}(X)$.

Etwas allgemeiner kann man zeigen

LEMMA 3.22. Für alle $i \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{H}(X)$ gilt:

$$(q_i[u] |0\rangle, q_i[v] |0\rangle) = (-1)^{i+1} q(u, v)$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} (q_i[u] |0\rangle, q_i[v] |0\rangle) &= (-1)^i (|0\rangle, q_{-i}[u] q_i[v] |0\rangle) \\ &= (-1)^i ((-1)(|0\rangle, q(u, v) |0\rangle) + (|0\rangle, q_i[v] q_{-i}[u] |0\rangle)) \\ &= (-1)^{i+1} q(u, v) \quad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.23. Die kleine Diagonale $\delta : X \rightarrow X^{[3]}$ ist eine Untervarietät der (komplexen) Kodimension 4. Die Fundamentalklasse $[\delta]$ ist also ein Element von $H^8(X^{[3]})$. Um sie auszurechnen, interessiert uns insbesondere die Schnittpaarung auf $H^8(X^{[3]}) \times H^4(X^{[3]})$.

Seien $\gamma, \gamma', \delta, \delta' \in H^2(X)$. Die Schnittpaarung auf $H^8(X^{[3]}) \times H^4(X^{[3]})$ ist gegeben durch:

$(-, -)$	vol_3	$\text{vol}_2 \gamma_1$	$\text{vol}_1^2 \mathbf{1}_1$	$\text{vol}_1 \gamma_2$	$\text{vol}_1 \gamma_1 \gamma'_1$
$\mathbf{1}_3$	3				
$\mathbf{1}_2 \delta_1$		$-2q(\gamma, \delta)$			
$\mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1$			2		
$\mathbf{1}_1 \delta_2$				$-2q(\gamma, \delta)$	
$\mathbf{1}_1 \delta_1 \delta'_1$					$q(\gamma, \delta)q(\gamma', \delta') + q(\gamma, \delta')q(\gamma', \delta)$

Es bezeichnet dabei $q(-, -)$ die Schnittpaarung auf der Fläche X . Es wurden wieder die Konventionen aus (3.18) für die Nakajimaoperatoren verwendet. Leere Felder stehen für 0.

BEWEIS. Wir beweisen exemplarisch die Formel $(\text{vol}_2 \gamma_1, \mathbf{1}_2 \delta_1) = -2q(\gamma, \delta)$:

$$\begin{aligned}
 (\text{vol}_2 \gamma_1, \mathbf{1}_2 \delta_1) &= (-1)^2 (\gamma_1, \text{vol}_{-2} \mathbf{1}_2 \delta_1) \\
 &= (\gamma_1, (\mathbf{1}_2 \text{vol}_{-2}) \delta_1) + (\gamma_1, (-2q(\text{vol}, \mathbf{1})) \delta_1) \\
 &= (\gamma_1, \mathbf{1}_2 \delta_1 \text{vol}_{-2}) - 2(\gamma_1, \delta_1) \\
 &= -2q(\gamma, \delta)
 \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet: Lemma (3.20), die Nakajimarelation (3.7) und Bemerkung (3.22). \square

Das Cup-Produkt

Aus der Beschreibung von \mathbb{H} als Modul über der Heisenberg-Algebra konnten wir die Produktpaarung konstruieren. Für das volle Cup-Produkt haben M. Lehn und C. Sorger in [16] eine Beschreibung im Falle von projektiven Flächen mit numerisch trivialem kanonischem Divisor gefunden. Das Resultat besagt, dass die (singuläre) Kohomologie des Hilbertschemas $X^{[n]}$ mit der Orbifold-Kohomologie des globalen Quotienten $S^n X = X^n / \mathfrak{S}_n$ übereinstimmt.

Die Autoren konstruieren eine Folge von Endofunktoren

$$-^{[n]} : \mathbf{Frob} \longrightarrow \mathbf{Frob}$$

in der Kategorie der graduierten Frobeniusalgebren. Wendet man diesen Funktor auf die Kohomologie einer solchen Fläche an berechnet der Funktor die Kohomologie des n -ten Hilbertschemas und zwar als Algebra, d.h. mit Cup-Produkt.

Die Konstruktion dieses Funktors ist recht aufwendig. Zunächst müssen wir unsere Grad und Vorzeichenkonventionen anpassen, um den Kontext graduierter Frobeniusalgebren zu erfüllen. Die Algebra $A^{[n]}$ konstruiert man nun als zentrale Unter algebra einer größeren, nicht kommutativen Algebra $A\{\mathfrak{S}_n\}$, deren Definition intensiv die Kombinatorik der symmetrischen Gruppe verwendet. Wir betrachten dabei Tensorprodukte, die durch Bahnen der Operation von Untergruppen der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n auf $[n]$ indiziert sind. Um keine Anordnung dieser Bahnen wählen zu müssen, definieren wir ein ungeordnetes Tensorprodukt mit den Eigenschaften, die man etwa von der ungeordneten Summe $\bigoplus_{m \in M}$ gewohnt ist. Obwohl die Konstruktion konzeptionell relativ einfach ist, bringt sie einigen zusätzlichen Aufwand mit sich. Dem Leser sei empfohlen, das Kapitel zunächst zu überfliegen und sich an den konkreten Beispielen der hinteren Unterabschnitte zu orientieren.

GENERALVORAUSSETZUNG 4.1. In diesem Kapitel sei X eine projektive K3 Fläche.

1. Die Graduierung

Wir hatten im letzten Abschnitt homogene Operatoren $q_i[u] \in \text{End}(\mathbb{H})$ vom Bigrad $(i, \text{deg}(u) + 2(i - 1))$ konstruiert. Der kohomologische Grad wird also von diesen Operatoren in etwas unangenehmer Weise verändert. Wir können dieses Fehlverhalten korrigieren, indem wir die Graduierung von \mathbb{H} etwas anpassen. Die modifizierten Versionen der Operatoren und Räume verzieren wir mit einem (\sim) .

DEFINITION 4.2. Sei Y eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension d . Setze

$$\tilde{H}^k(Y) := H^{k-d}(Y), \quad \tilde{H}(Y) := \bigoplus_{i=-d}^d \tilde{H}^k(Y)$$

und

$$\tilde{\mathbb{H}} := \bigoplus_{n \geq 0} H(X^{[n]})[2n] = \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{H}(X^{[n]})$$

Für ein homogenes Element $u \in \tilde{H}^k(Y)$ bezeichne $\widetilde{\text{deg}}(u) := k$ den verschobenen Grad.

Wir modifizieren nun die Vorzeichen der Nakajimaoperatoren.

DEFINITION 4.3. Sei $i > 0$, setze

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i[u] &:= q_i[u] \\ \tilde{q}_{-i}[u] &:= (-1)^i q_{-i}[u].\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich das Vorzeichen bei der Definition von q_i für negative i mit dem eben eingeführten wieder aufhebt. Mit den Bezeichnungen aus (2) gilt: $q_{-i}[u]\alpha = \text{pr}_{1*}(\text{pr}_3^*(\alpha) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{n-i,i}])$.

Der Operator $\tilde{q}_i[u]$ ist nun homogen vom Grad von $\widetilde{\text{deg}}(q_i[u]) = \widetilde{\text{deg}}(u)$. Den Integraloperator modifizieren wir ebenfalls durch ein Vorzeichen:

DEFINITION 4.4. Sei X eine K3-Fläche wir setzen:

$$T : \tilde{H}(X) \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto - \int_X u.$$

Für das Hilbertschema setzen wir:

$$T : \tilde{H}(X^{[n]}) = H(X^{[n]}) \longrightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (-1)^n \int_{X^{[n]}} a.$$

BEMERKUNG 4.5. An der Form von (3.7) hat sich nichts verändert. Es gilt:

$$[\tilde{q}_i[u], \tilde{q}_j[v]] = i\delta_{i+j} T(u \cdot v) \text{id}_{\tilde{H}}$$

2. Frobenius-Algebren

DEFINITION 4.6. Eine *graduierete Frobeniusalgebra* $(A, T, \mathbf{1})$ ist ein endlich dimensionaler graduierter \mathbb{C} -Vektorraum $A = \bigoplus_{i=-d}^d A^i$ mit einem graduiert kommutativen und assoziativen Produkt $A \otimes A \rightarrow A$ vom Grad d mit Einselement $\mathbf{1} \in A^{-d}$ zusammen mit einer Linearform $T : A \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $(a, b) \mapsto T(ab)$ eine nicht ausgeartete Bilinearform ist.

BEISPIEL 4.7. Die verschobene Kohomologie $\tilde{H}(Y)$ einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension d wird eine graduierete Frobeniusalgebra bezüglich Cup-Produkt und dem Integral.

Insbesondere sind $(\tilde{H}(X), f, \mathbf{1}_X)$ und $(\tilde{H}(X^{[n]}), f, \mathbf{1}_{X^{[n]}})$ sowie $(\tilde{H}(X), T, \mathbf{1}_X)$ und $(\tilde{H}(X^{[n]}), T, \mathbf{1}_{X^{[n]}})$ graduierete Frobeniusalgebren.

Die Kohomologie einer K3 Fläche ist eine kommutative Frobeniusalgebra. Da wir die Konstruktion nur für diesen Spezialfall anwenden wollen, konzentrieren wir uns hier auf den kommutativen Fall.

Sei A eine kommutative Frobeniusalgebra. Die n -te Tensorpotenz $A^{\otimes n}$ ist wieder eine graduierete Frobeniusalgebra:

$$\begin{aligned}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_n) &:= (a_1 b_1 \otimes \dots \otimes a_n b_n) \\ T(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &:= T(a_1) \cdot \dots \cdot T(a_n).\end{aligned}$$

Für $a_i \in A^{k_i}$ sei $\text{deg}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) := \sum_i k_i$. Die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n operiert durch Permutation der Faktoren von rechts auf $A^{\otimes n}$:

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot \pi := (a_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\pi^{-1}(n)})$$

3. Ungeordnete Tensorprodukte

Es stellt sich als nützlich heraus, das Tensorprodukt von Frobeniusalgebren auch für ungeordnete Indexmengen zu definieren.

DEFINITION 4.8. Sei I eine endliche Menge mit n Elementen. Es bezeichne $[n]$ die Menge $1, \dots, n$ und $O(I) := \{f : [n] \xrightarrow{\cong} I\}$ die Menge der Anordnungen von I . Wir definieren:

$$(4.1) \quad A^{\otimes I} := \left(\bigoplus_{f \in O(I)} A^{\otimes n} \right)^{\mathfrak{S}_n}$$

\mathfrak{S}_n operiert hierbei simultan (von links) auf der Indexmenge und (von rechts) auf jedem Faktor $A^{\otimes n}$. Die Operation auf $O(I)$ ist gegeben durch $\pi \cdot f := f \circ \pi^{-1}$. Für $\alpha = (a_f)_f \in \bigoplus_{f \in O(I)} A^{\otimes n}$ und $\pi \in \mathfrak{S}_n$ setze: $\alpha \cdot \pi = (a_f \cdot \pi)_{\pi \cdot f}$.

Die Operation auf der Summe ist eindeutig festgelegt durch die Forderung, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A^{\otimes I} & \hookrightarrow & \bigoplus_{f \in O(I)} A^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{pr}_f} & A^{\otimes n} \\ & \searrow & \downarrow \cdot \pi & & \downarrow \cdot \pi \\ & & \bigoplus_{f \in O(I)} A^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{pr}_{\pi \cdot f}} & A^{\otimes n} \end{array}$$

In der Tat ist $A^{\otimes I}$ somit genau der projektiven Limes über die Familie

$$\{A_f^{\otimes n} \xrightarrow{\cdot \pi} A_{\pi \cdot f}^{\otimes n}, \pi \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Hierbei steht A_f für eine Kopie von A .

Wir verdeutlichen die Operation noch einmal auf Elementniveau: $\alpha \in A^{\otimes I}$ ist ein Tupel von Tensoren $\alpha = (a_1^f \otimes \dots \otimes a_n^f)_f$. Für $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \pi &= ((a_1^f \otimes \dots \otimes a_n^f) \cdot \pi)_{\pi \cdot f} \\ &= (a_{\pi^{-1}(1)}^f \otimes \dots \otimes a_{\pi^{-1}(n)}^f)_{f \circ \pi^{-1}} \\ &= (a_{\pi^{-1}(1)}^{f \circ \pi} \otimes \dots \otimes a_{\pi^{-1}(n)}^{f \circ \pi})_f \end{aligned}$$

BEMERKUNG 4.9. Sobald wir eine Ordnung d.h. eine Bijektion $g : [n] \rightarrow I$ wählen, können wir $A^{\otimes n}$ kanonisch mit $A^{\otimes I}$ identifizieren.

$$\iota_g : a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto (a_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes a_{\pi(n)})_{g \circ \pi} = (a_{(g^{-1} \circ f)(1)} \otimes \dots \otimes a_{(g^{-1} \circ f)(n)})_f$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass Bild von ι_g ganz im \mathfrak{S}_n -invarianten Teil von $\bigoplus_{f \in O(I)} A^{\otimes n}$ enthalten ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\iota_g(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) \cdot \pi &= (a_{(g^{-1} \circ f)(1)} \otimes \dots \otimes a_{(g^{-1} \circ f)(n)})_f \cdot \pi \\ &= (a_{(g^{-1} \circ (f \circ \pi))(\pi^{-1}(1))} \otimes \dots \otimes a_{(g^{-1} \circ (f \circ \pi))(\pi^{-1}(n))})_f \\ &= (a_{(g^{-1} \circ f)(1)} \otimes \dots \otimes a_{(g^{-1} \circ f)(n)})_f \\ &= \iota_g(a_1 \otimes \dots \otimes a_n). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Projektion auf den Summanden zu g eine Inverse definiert. \square

BEMERKUNG 4.10. Haben wir nun ein durch I indiziertes Tupel $(a_i)_{i \in I}, a_i \in A$ gegeben, so kann man nun dem Ausdruck $\otimes_{i \in I} a_i \in A^{\otimes I}$ einen Sinn geben. Man wähle eine Bijektion $f : [n] \rightarrow I$ und setze $(\otimes_{i \in I} a_i) := \iota_f(a_{f(1)} \otimes \dots \otimes a_{f(n)})$. Das erhaltene Element ist unabhängig von der Wahl von f .

4. Multiplikationsabbildungen

Sei nun $\nu : [n] \rightarrow [k]$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren eine Abbildung $m(\nu) : A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes k}$ durch Ausmultiplizieren der Urbilder:

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \prod_{i \in \nu^{-1}(1)} a_i \otimes \dots \otimes \prod_{i \in \nu^{-1}(k)} a_i$$

Wir wollen dies nur für beliebige surjektive Abbildungen verallgemeinern: Seien I, J zwei endliche Mengen mit Kardinalitäten $\#I = n$, $\#J = k$ und sei $\varphi : I \rightarrow J$ eine surjektive Abbildung. Wähle nun eine Bijektion $f : [n] \rightarrow I$ und definiere

$$\varphi^* : A^{\otimes I} \rightarrow A^{\otimes J}, (a_1^e \otimes \dots \otimes a_n^e)_{e \in \mathcal{O}(I)} \mapsto (m(g^{-1} \circ \varphi \circ f)(a_1^f \otimes \dots \otimes a_n^f))_g$$

Man verifiziert, dass φ_f^* nur Werte im \mathfrak{S}_n invarianten Teil annimmt und dass die Definition nicht von der Wahl von f abhängt. Aus der Definition ist unmittelbar klar, dass φ^* ein Homomorphismus von Algebren vom Grad $d(\#I - \#J)$ ist.

Es sei weiter

$$\varphi_* : A^{\otimes J} \longrightarrow A^{\otimes I}$$

die adjungierte Abbildung zu φ^* . φ_* ist kein Ringhomomorphismus. Fasst man $A^{\otimes J}$ vermöge φ^* als $A^{\otimes I}$ Modul auf, so ist φ_* ein Modulhomomorphismus. Mit anderen Worten, es gilt die Projektionsformel:

$$\forall b \in A^{\otimes I}, a \in A^{\otimes J} : \varphi_*(a \cdot \varphi^*(b)) = \varphi_*(a) \cdot b$$

Betrachte nun die Abbildung:

$$A \xrightarrow{\Delta_*} A \otimes A \xrightarrow{\Delta} A$$

wobei Δ_* die Adjungierte zur Multiplikation Δ bezeichnet. Das Bild von $\mathbf{1} \in A$ unter der Komposition heißt Eulerklasse $e = e(A)$. Wird A^{-d} von $\mathbf{1}$ erzeugt, so gibt es einen eindeutigen Erzeuger vol von A^d mit $\langle \mathbf{1}, \text{vol} \rangle = 1$. In diesem Falle gilt $e = \chi(A) \text{vol}$. Dabei ist $\chi(A) := \sum_i (-1)^i \dim(A^i)$ die Eulercharakteristik von A . Da wir A als kommutativ vorausgesetzt haben, ist $A^i = 0$ für ungerades i . Es gilt also $\chi(A) = \dim(A)$.

Sei $\nu : I \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Abbildung. Setze:

$$e^\nu := \otimes_{i \in I} e^{\nu(i)} \in A^{\otimes I}.$$

5. Die symmetrische Gruppe

DEFINITION 4.11. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Der Grad von π ist definiert als:

$$|\pi| := n - [n]/\langle \pi \rangle = \min\{m | \pi = \tau_1 \dots \tau_m, \tau_i \text{ Transposition}\}$$

Der Grad ist invariant unter Konjugation, hängt also nur vom Zykeltyp ab. Außerdem ist er stabil unter der Standardeinbettung $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+1}$ induziert durch $[n] \subset [n+1]$.

Der *Graphdefekt* ist definiert als: $g(\pi_1, \pi_2) : [n]/\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \rightarrow \mathbb{N}_0$,

$$B \mapsto \frac{1}{2}(2 + \#B - \#B/\langle \pi_1 \rangle - \#B/\langle \pi_2 \rangle - \#B/\langle \pi_1, \pi_2 \rangle).$$

Dass der Graphdefekt tatsächlich Werte in \mathbb{N} annimmt, ist a priori nicht klar. Lehn und Sorger schreiben in ([16]) g als Eulerzahl einer speziell konstruierten Riemannschen Fläche.

BEISPIEL 4.12. Wir berechnen für den Fall \mathfrak{S}_3 den Graphdefekt. Sei $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{S}_3$, $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_3$ Transpositionen, $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ ein Dreizykel, $B \in A/\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$. Die folgenden Aussagen folgen leicht aus der Definition:

- g ist symmetrisch.
- $\#B = 1$ dann $g(\pi_1, \pi_2)(B) = 0$.

- $g(\pi, \text{id}) = 0$.
- $g(\pi, \pi^{-1}) = 0$.
- $\langle \tau, \sigma \rangle = \mathfrak{S}_3$, Alle Nebenklassen $C \in A/\langle \tau, \sigma \rangle$ haben Mächtigkeit $\#C = 1$.
Es folgt: $g(\tau, \sigma) = 0$.
- Es gelte $\tau \neq \tau'$, dann ist: $g(\tau, \tau') = 0$.
- $g(\sigma, \sigma)(\{1, 2, 3\}) = 1$.

Damit haben wir g auf \mathfrak{S}_3 vollständig bestimmt.

6. Das Modell

Betrachte die graduierte Frobeniusalgebra

$$A\{\mathfrak{S}_n\} := \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{S}_n} A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle}.$$

Die Symmetrische Gruppe operiert (von links) auf sich selbst durch Konjugation: $\sigma\pi = \sigma\pi\sigma^{-1}$. Die Operation von \mathfrak{S}_n auf $[n]$ induziert Bijektionen

$$\sigma : [n]/\langle \pi \rangle \longrightarrow [n]/\langle \sigma\pi \rangle, x \mapsto \sigma x$$

für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Wir erhalten Isomorphismen:

$$\sigma^* : A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle} \longrightarrow A^{\otimes [n]/\langle \sigma\pi \rangle}.$$

Damit können wir eine Rechtsoperation der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n auf $A\{\mathfrak{S}_n\}$ definieren:

$$(a_\pi)_\pi \cdot \sigma := (\sigma^*(a_\pi))_{\sigma\pi} = (\sigma^*(a_{\pi\sigma}))_\pi.$$

Wir setzen nun:

$$A^{[n]} := A\{\mathfrak{S}_n\}^{\mathfrak{S}_n}.$$

LEMMA 4.13. *Es gilt:*

$$A^{[n]} \cong \mathbb{F}_n(A)$$

wobei ν alle Partitionen von $\sum_i i\nu_i = n$ durchläuft. $\mathbb{F}_n(A)$ steht dabei für den Gewicht- n Anteil im Fockraum über A .

BEWEIS. Die Konjugationsklasse eines Elementes $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist durch den Zykeltyp eindeutig festgelegt. Wir können die Summation über die symmetrische Gruppe in eine Summe über den Zykeltyp, d.h. die Partitionen von n , und eine Summe über alle Konjugationsklassen eines Elementes ersetzen:

$$A\{\mathfrak{S}_n\} = \bigoplus_{\nu} \bigoplus_{\pi, [\pi]=\nu} A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle}$$

\mathfrak{S}_n operiert nun auf jedem Summand einzeln. Die Anzahl der Zykel der Länge k von π ist durch ν_k gegeben.

Die Abbildung: $\sigma : [n]/\pi \rightarrow [n]/\langle \sigma\pi \rangle$ respektiert Zykellänge. Wir können also nach Länge der Zykel sortieren und erhalten wieder eine Operation auf den einzelnen Faktoren: $Z(\pi, k) := \{B \in [n]/\pi \mid \#B = k\}$,

$$A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle} = \bigotimes_k A^{\otimes Z(k, \pi)}.$$

Jeder Faktor $A^{\otimes Z(k, \pi)}$ ist auf nicht kanonische Weise isomorph zu $A^{\otimes \nu_k}$. Der Normalisator von π in \mathfrak{S}_n operiert auf $Z(k, \pi)$. Diese Operation ist transitiv. Ein invariantes Element $(a_\pi)_\pi \in A\{\mathfrak{S}_n\}$ muss also komponentenweise im symmetrischen Teil von $A^{\otimes Z(k, \pi)}$ liegen. Dieser symmetrische Teil ist nun kanonisch isomorph zu $\text{Sym}^{\nu_k}(A)$, da jede Wahl einer Anordnung auf symmetrischen Tensoren dieselbe Abbildung induziert. Es gilt also:

$$\left(\bigoplus_{\pi, [\pi]=\nu} A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle} \right)^{\mathfrak{S}_n} = \left(\bigoplus_{\pi, [\pi]=\nu} \text{Sym}^{\nu_k} A \right)^{\mathfrak{S}_n}$$

Die Operation auf der rechten Seite vertauscht nur noch (transitiv) die Summanden. Damit ist die erste Aussage des Lemmas bewiesen.

Die Isomorphie von $\mathbb{F}_n(A) = \mathbb{H}(X^{[n]})$ zu $\bigoplus_{\nu} \bigotimes_i \text{Sym}^{\nu_i} A$ hatten wir bereits in (3.14) festgestellt. Wir wollen jedoch einen speziellen Isomorphismus zu $A^{[n]}$ festhalten. Betrachte zunächst die Abbildung:

$$\begin{aligned} \Phi : A\{\mathfrak{S}_n\} &\rightarrow \mathbb{F}_n(A), \\ (\otimes_{B \in [n]/\pi} a_B^\pi)_{\pi \in \mathfrak{S}_n} &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{B \in [n]/\pi} q_{\#B}[a_B^\pi] \right) |0\rangle \end{aligned}$$

Diese ist \mathfrak{S}_n -invariant und surjektiv. Damit ist die Einschränkung auf $A^{[n]}$ ebenfalls surjektiv. Ein Vergleich der Dimensionen liefert nun die Injektivität. \square

DEFINITION 4.14. Sei $r = (r_1^1 \dots r_{n_1}^1)(r_1^2 \dots r_{n_2}^2) \dots (r_1^k \dots r_{n_k}^k)$ die Zykelzerlegung eines Elementes π der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n , $n = \sum n_i$. Wir erhalten damit eine Anordnung der Nebenklassen $[n]/\langle \pi \rangle = \{\{r_1^1, \dots, r_{n_1}^1\}, \dots, \{r_1^k, \dots, r_{n_k}^k\}\}$. Diese induziert nach (4.9) einen Isomorphismus:

$$\iota_r : A^{\otimes k} \longrightarrow A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle}, \quad x \mapsto x(r).$$

Ist die Zykelzerlegung nicht vollständig in dem Sinne, dass nicht alle Elemente von $[n]$ aufgeführt sind, so sind die verbleibenden als Einszykel anzuhängen. Nach (3.7) ist der so erhaltene Isomorphismus unabhängig von der gewählten Reihenfolge.

BEISPIEL 4.15. Wir bestimmen den Isomorphismus aus dem Beweis von (4.13) für den Spezialfall von \mathfrak{S}_3 :

$$\begin{aligned} \Phi : A\{S_3\} &\longrightarrow \mathbb{F}(A), \\ a \otimes b \otimes c \ (1)(2)(3) &\mapsto 1/6 \ q_1[a]q_1[b]q_1[c] |0\rangle = 1/6 \ a_1 b_1 c_1 \\ a \otimes b \ (12) = a \otimes b \ (12)(3) &\mapsto 1/6 \ q_2[a]q_1[b] |0\rangle = 1/6 \ a_2 b_1 \\ a \ (123) &\mapsto 1/6 \ q_3[a] |0\rangle = 1/6 \ a_3 \end{aligned}$$

Die Inverse ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{F}(A) &\longrightarrow A^{[3]} \\ a_1 b_1 c_1 &\mapsto (a \otimes b \otimes c + a \otimes c \otimes b + \dots + c \otimes b \otimes a)(1)(2)(3) \\ a_2 b_1 &\mapsto 2(a \otimes b(12) + a \otimes b(23) + a \otimes b(13)) \\ a_3 &\mapsto 3(a(123) + b(132)) \end{aligned}$$

Wir haben dabei die Kurznotationen aus (4.14) und (3.17) verwendet.

7. Das Cup-Produkt

Seien $G \subset H \subset \mathfrak{S}_n$ Untergruppen. Die Inklusion $G \subset H$ induziert eine Surjektion von Bahnräumen: $\varphi : [n]/H \rightarrow [n]/G$ und somit Abbildungen:

$$f^{G,H} := \varphi^* : A^{\otimes [n]/H} \rightarrow A^{\otimes [n]/G} \quad \text{und} \quad f_{G,H} := \varphi_* : A^{\otimes [n]/G} \rightarrow A^{\otimes [n]/H}$$

Für zwei Elemente $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$ setze nun:

$$\begin{aligned} m_{\pi,\rho} &: A^{\otimes [n]/\langle \pi \rangle} \otimes A^{\otimes [n]/\langle \rho \rangle} \rightarrow A^{\otimes [n]/\langle \pi \cdot \rho \rangle}, \\ a \otimes b &\mapsto f_{\langle \pi, \rho \rangle, \langle \pi \cdot \rho \rangle}(f^{\langle \pi \rangle, \langle \pi \cdot \rho \rangle}(a) \cdot f^{\langle \rho \rangle, \langle \pi \cdot \rho \rangle}(b) \cdot e^{g(\pi, \rho)}) \end{aligned}$$

Dabei ist $g(\pi, \rho) : [n]/\langle \pi, \rho \rangle \rightarrow \mathbb{N}_0$ der Graphdefekt.

SATZ 4.16 (Lehn,Sorger [16]). *Das Produkt:*

$$\begin{aligned} \cdot \cdot : A\{\mathfrak{S}_n\} \times A\{\mathfrak{S}_n\} &\longrightarrow A\{\mathfrak{S}_n\} \\ (a\pi, b\rho) &\mapsto m_{\pi,\rho}(a \otimes b)\pi\rho \end{aligned}$$

ist assoziativ, \mathfrak{S}_n invariant und homogen vom Grad nd .

SATZ 4.17 (Lehn,Sorger [16]). $A^{[n]} \subset A\{\mathfrak{S}_n\}$ ist ein kommutativer Unterring. Unter dem Isomorphismus aus (4.13)

$$\tilde{H}^*(X)^{[n]} \cong \tilde{H}^*(X^{[n]})$$

stimmen das Cup-Produkt und das Produkt aus (4.16) überein.

Das folgende Lemma vereinfacht die Berechnung der Adjungierten des Cup-Produkts auf der Fläche:

LEMMA 4.18. *Sei Y ein kompakter topologischer Raum, $m : H(Y) \otimes H(Y) \rightarrow H(Y)$, $u \otimes v \mapsto u.v$ das Cup-Produkt, $[\Delta] \in H(Y \times Y)$ die Fundamentalklasse der Diagonalen $\Delta \subset Y \times Y$. Es sei $e_1, \dots, e_k \in H(Y)$ eine Basis der Kohomologie, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ die duale Basis: $\int_Y e_i \cdot \varepsilon_j = \delta_{i,j}$.*

Unter dem Künnethisomorphismus $H(Y \times Y) \cong H(Y) \otimes H(Y)$ gilt:

$$[\Delta] = \sum_{i=1}^k e_i \otimes \varepsilon_i$$

Die Adjungierte von m ist gegeben durch:

$$u \mapsto (u \otimes \mathbf{1}) \cdot [\Delta]$$

BEWEIS. Das Cup-Produkt ist definiert als $u.v = \Delta^*(u \otimes v)$. Es gilt also:

$$\int_{Y \times Y} (u \otimes v) \cdot [\Delta] = \int_Y u.v$$

Nach Poincarédualität reicht es

$$\int_{Y \times Y} (u \otimes v) \cdot \left(\sum_{i=1}^k e_i \otimes \varepsilon_i \right) = \int_Y u.v$$

für alle $u, v \in H(Y)$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Y} (u \otimes v) \cdot \left(\sum_{i=1}^k e_i \otimes \varepsilon_i \right) &= \sum_{i=1}^k \left(\int_Y u \cdot e_i \right) \left(\int_Y v \cdot \varepsilon_i \right) \\ &= \int_Y u \cdot \left(\sum_{i=1}^k \left(\int_Y v \cdot \varepsilon_i \right) e_i \right) \\ (4.2) \qquad \qquad \qquad &= \int_Y u.v \end{aligned}$$

Nun zur zweiten Behauptung. Die definierende Eigenschaft der Adjungierten lautet:

$$\int_Y m(u, v).w = \int_Y (u.v).w = \int_{Y \times Y} (u \otimes v).m^*(w)$$

für alle $u, v, w \in H(X)$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Y} (u \otimes v) \cdot (\mathbf{1} \otimes w) \cdot [\Delta] &= \int_{Y \times Y} (u \otimes (v.w)) \cdot [\Delta] \\ &= \int_Y (u.v).w \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. \square

BEISPIEL 4.19. Wir betrachten wieder den Spezialfall $X^{[3]}$. Bei den Elementen von $A\{\mathfrak{S}_3\}$, $A = H^*(X)$, unterscheiden wir folgende Fälle:

$$\begin{aligned}
(a_i \otimes a_j \otimes a_k)(i)(j)(k) \cdot (b_i \otimes b_j \otimes b_k)(i)(j)(k) &= (a_i b_i \otimes a_j b_j \otimes a_k b_k)(i)(j)(k) \\
(a_i \otimes a_j \otimes a_k)(i)(j)(k) \cdot (b_{ij} \otimes b_k)(ij)(k) &= (a_i a_j b_{ij} \otimes a_k b_k)(ij)(k) \\
(a_i \otimes a_j \otimes a_k)(i)(j)(k) \cdot (b_{ijk})(ijk) &= (a_i a_j a_k b_{ijk})(ijk) \\
(a_{ij} \otimes a_k)(ij)(k) \cdot (b_{ij} \otimes b_k)(ij)(k) &= (m^*(a_{ij} b_{ij}) \otimes a_k b_k)(i)(j)(k) \\
(a_{ij} \otimes a_k)(ij)(k) \cdot (b_{jk} \otimes b_i)(jk)(i) &= (a_{ij} a_k b_{jk} b_i)(ijk) \\
(a_{ij} \otimes a_k)(ij)(k) \cdot (b_{ijk})(ijk) &= (m^*(a_{ij} a_k b_{ijk}) \otimes (a_{ij} a_k b_{ijk}))(jk)(i) \\
(a_{ij} \otimes a_k)(ij)(k) \cdot (b_{ikj})(ikj) &= (m^*(a_{ij} a_k b_{ijk}) \otimes (a_{ij} a_k b_{ijk}))(ik)(j) \\
(a_{ijk})(ijk) \cdot (b_{ijk})(ijk) &= 24m^*(a_{ijk} b_{ijk} \text{ vol})(ijk) \\
(a_{ijk})(ijk) \cdot (b_{ikj})(ikj) &= m_3^*(a_{ijk} b_{ijk})(\text{id})
\end{aligned}$$

Es bezeichnet $m : A \otimes A \rightarrow A$ die Multiplikation und $m_3 : A \otimes A \otimes A \rightarrow A$ die Multiplikation von 3 Elementen aus A . Mit f^* bezeichnen wir die adjungierte von f bzgl. $T = -\int (!)$. Im Falle $A = H^*(X)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
m^* : \mathbf{1} &\mapsto -(\text{vol} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{vol} + \sum_{i=1}^{22} \gamma^i \otimes \gamma^i) \\
\gamma^i &\mapsto -(\text{vol} \otimes \gamma^i + \gamma^i \otimes \text{vol}) \\
\text{vol} &\mapsto -\text{vol} \otimes \text{vol} \\
m_3^* : \mathbf{1} &\mapsto \text{vol} \otimes \text{vol} \otimes \mathbf{1} + \text{vol} \otimes \mathbf{1} \otimes \text{vol} + \mathbf{1} \otimes \text{vol} \otimes \text{vol} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{22} (\gamma^i \otimes \gamma^i \otimes \mathbf{1} + \gamma^i \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^i + \mathbf{1} \otimes \gamma^i \otimes \gamma^i) \\
\gamma^i &\mapsto \text{vol} \otimes \text{vol} \otimes \gamma^i + \text{vol} \otimes \gamma^i \otimes \text{vol} + \gamma^i \otimes \text{vol} \otimes \text{vol} \\
\text{vol} &\mapsto \text{vol} \otimes \text{vol} \otimes \text{vol}
\end{aligned}$$

BEISPIEL 4.20. Wir berechnen nun einige Produkte von Klassen in $H^2(X^{[3]})$. Sei $\gamma = \sum a_i \gamma^i \in H^2(X)$, $\gamma^2 = \sum_{i,j=1}^{22} a_i a_j \int \gamma_i \gamma_j \cdot \text{vol} =: a \cdot \text{vol}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 \cdot \mathbf{1}_1^2 \gamma_1 &= (2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma + \mathbf{1} \otimes \gamma \otimes \mathbf{1} + \gamma \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(1)(2)(3)))^2 \\
&= 4(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^2 + \mathbf{1} \otimes \gamma^2 \otimes \mathbf{1} + \gamma^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(1)(2)(3) \\
&\quad + 8(\mathbf{1} \otimes \gamma \otimes \gamma + \gamma \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma + \gamma \otimes \gamma \otimes \mathbf{1})(1)(2)(3) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_1 (\gamma^2)_1 + 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \mathbf{1}_1 \gamma_1 \gamma_1 \\
&= 2 \left(\int_X \gamma^2 \right) \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1 + 4 \mathbf{1}_1 \gamma_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 \cdot \mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1 &= 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma + \mathbf{1} \otimes \gamma \otimes \mathbf{1} + \gamma \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(1)(2)(3) \\
&\quad \cdot 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(12) + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(23) + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(13)) \\
&= 4(\mathbf{1} \otimes \gamma(12) + \mathbf{1} \otimes \gamma(23) + \mathbf{1} \otimes \gamma(13)) \\
&\quad + 2(\gamma \otimes \mathbf{1}(12) + \gamma \otimes \mathbf{1}(23) + \gamma \otimes \mathbf{1}(13)) \\
&= 2 \mathbf{1}_2 \gamma_1 + 4 \gamma_2 \mathbf{1}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1 &= 4(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(12) + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(23) + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}(13))^2 \\
&= 4((m^*(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(1)(2)(3) + (m^*(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(2)(3)(1) \\
&\quad + (m^*(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(1)(3)(2)) + 12(\mathbf{1}(123) + \mathbf{1}(132))) \\
&= 2(-2 \operatorname{vol}_1 \mathbf{1}_1^2 - \sum_i \tilde{\gamma}_1^i \gamma_1^i \mathbf{1}_1 + 2 \mathbf{1}_3) \\
&= -4 \operatorname{vol}_1 \mathbf{1}_1^2 - 2 \sum_i \tilde{\gamma}_1^i \gamma_1^i \mathbf{1}_1 + 4 \mathbf{1}_3 \\
&= 4 \mathbf{1}_3 - 2 \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_{(1,1)}
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Tabellen (4.19) und die Konventionen aus (3.17) verwendet. Die Isomorphismen von $\tilde{H}(X^{[3]})$ zu $\tilde{H}(X)^{[3]}$ wurden nicht notiert.

Nodale Kurven und Hilbertschemata

1. K-Theorie

Wir wiederholen kurz einige Resultate über Vektorbündel:

DEFINITION 5.1. Es sei S ein Schema, setze

$$K^*(S) := \mathbb{Z}[\{\text{Vektorbündel auf } S\} / \cong] / \text{exakte Sequenzen}$$

und

$$K_*(S) := \mathbb{Z}[\{\text{Kohärente Garben auf } S\} / \cong] / \text{exakte Sequenzen.}$$

Ein Morphismus $f : S \rightarrow T$ zwischen Schemata induziert eine natürliche Abbildung

$$f^! : K^*(T) \rightarrow K^*(S), E \mapsto f^*(E)$$

durch Pullback von Vektorbündeln. Falls f eigentlich erhalten wir

$$f_! : K_*(S) \rightarrow K_*(T), F \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i R^i f_*(F),$$

dabei sind $R^i f_*(F)$ die höheren direkten Bildgarben (vgl. [12]).

BEMERKUNG 5.2. Sei $f : S \rightarrow T$ ein endlicher Morphismus und F eine kohärente Garbe auf S . Die Fasern von f sind nulldimensional. Nach ([12] III,11.2) ist damit $R^i f_* = 0$ für $i > 0$ und somit $f_! = f_*$. Insbesondere ist $f_! F$ eine Garbe, keine formale Linearkombination in $K_*(T)$. Ist f flach und F lokalfrei, so ist auch $f_* F$ lokalfrei. Die selbe Aussagen gelten, falls f nur eigentlich aber $f : \text{supp}(F) \rightarrow T$ endlich.

SATZ 5.3. Sei S glatt, dann ist der kanonische Dualitätsmorphimus

$$K^*(S) \rightarrow K_*(S),$$

der ein Vektorbündel auf seine Schnittgarbe abbildet, ein Isomorphismus. In diesem Falle unterscheiden wir nicht zwischen K^* und K_* sondern schreiben einfach K .

LEMMA 5.4. Sei $f : S \rightarrow T$ ein eigentlicher Morphismus glatter Schemata. Für $E \in K(T), F \in K(S)$ gilt die Projektionsformel:

$$f_!(f^!(E) \otimes F) = E \otimes f_!(F)$$

SATZ 5.5. Sei S ein glattes Schema über \mathbb{C} . Der Cherncharakter induziert eine natürliche Abbildung

$$K^*(S) \rightarrow H^*(S), E \mapsto \text{ch}(E)$$

in die (singuläre) Kohomologie. Das heißt $\text{ch}(f^*(E)) = f^*(\text{ch}(E))$.

SATZ 5.6 (Grothendieck-Riemann-Roch [8]). Sei $f : S \rightarrow T$ ein eigentlicher Morphismus glatter Schemata, dann gilt für alle $E \in K(S)$:

$$\text{ch}(f_!(E)) \cdot \text{td}(T) = f_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S))$$

Dabei ist $\text{td}(S) = \text{td}(\mathcal{T}_S)$ das Todd-Geschlecht des Tangentialbündels.

LEMMA 5.7. Sei S glatt, projektiv, $\Delta : S \rightarrow S \times S$ die Diagonale, dann gilt

$$\text{ch}(\Delta_*(E)) = \Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S)^{-1}).$$

BEWEIS. Riemann-Roch lautet in dieser Situation:

$$\Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S)) = \text{ch}(\Delta_!(E)) \cdot \text{td}(S \times S).$$

Nach (5.2) können wir $\Delta_!$ durch Δ_* ersetzen. Aus der Multiplikatitivität von td und Projektionsformel folgt weiter:

$$\begin{aligned} & \Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S)) \cdot \text{td}(S \times S)^{-1} \\ &= \Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S) \cdot \Delta^*(\text{td}(S \times S)^{-1})) \\ &= \Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S) \cdot \Delta^*(\text{pr}_1^*(\text{td}(S)) \cdot \text{pr}_2^*(\text{td}(S)))^{-1}) \\ &= \Delta_*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S)^{-1}). \end{aligned} \quad \square$$

LEMMA 5.8. *Seien S, T glatte Schemata, T projektiv, $E \in K(S \times T)$, dann gilt:*

$$\text{ch}(\text{pr}_{1!}(E)) = \text{pr}_{1*}(\text{ch}(E) \cdot \text{pr}_2^*(\text{td}(T)))$$

BEWEIS. Wie eben können wir schließen:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\text{pr}_{1!}(E)) &= \text{pr}_{1*}(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S \times T)) \cdot \text{td}(S)^{-1} \\ &= \text{pr}_{1*}(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(S \times T) \cdot \text{pr}_1^*(\text{td}(S)^{-1})) \\ &= \text{pr}_{1*}(\text{ch}(E) \cdot \text{pr}_2^*(\text{td}(T))) \end{aligned} \quad \square$$

2. Chernklassen tautologischer Bündel

GENERALVORAUSSETZUNG 5.9. In diesem Kapitel sei X eine projektive Fläche.

DEFINITION 5.10. Sei E ein Vektorbündel über X , $\{(A, x) \mid x \in A\} = \Xi_n \subset X^{[n]} \times X$ die universelle Familie. Das *tautologische Bündel* ist definiert als:

$$E^{[n]} := \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^* E \otimes \mathcal{O}_{\Xi_n}).$$

Die Faser über einem Punkt $[\xi] \in X^{[n]}$, $\xi \subset X$ d.h. einem Unterschema von X ist also gerade $E^{[n]}([\xi]) = H^0(\xi, E)$.

Mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch kann man die Chernklassen von $E^{[n]}$ aus den Chernklassen von E bestimmen:

DEFINITION 5.11. Sei $u \in H(X)$. Mit den Bezeichnungen von oben gelte:

$$u^{[n]} := \text{pr}_1^*(\text{pr}_2^*(u \cdot \text{td}(X))) \cdot \text{ch}(\mathcal{O}_{\Xi_n}).$$

LEMMA 5.12. *Damit ist:*

$$\text{ch}(E^{[n]}) = \text{ch}(E)^{[n]}.$$

BEWEIS. Nach (5.8) gilt:

$$\begin{aligned} \text{ch}(E^{[n]}) &= \text{ch}(\text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(E) \otimes \mathcal{O}_{\Xi_n})) \\ &= \text{pr}_{1*}(\text{ch}(\text{pr}_2^*(E) \otimes \mathcal{O}_{\Xi_n}) \cdot \text{pr}_2^*(\text{td}(X))) \\ &= \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^*(\text{ch}(E) \cdot \text{td}(X))) \cdot \text{ch}(\mathcal{O}_{\Xi_n}) \end{aligned}$$

Die Projektion von Ξ_n auf $X^{[n]}$ ist endlich. Somit stimmen $\text{pr}_{1!}$ und pr_{1*} für dieses Bündel überein (vgl. (5.2)). \square

In [15] gibt M. Lehn eine Darstellung der Chernklassen von $E^{[n]}$ in der Fock-raumbeschreibung von $H(X^{[3]})$. Im Spezialfall von Geradenbündeln gilt:

SATZ 5.13 (Lehn). *Sei $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$. Es gilt:*

$$\sum_{n \geq 0} c(\mathcal{L}^{[n]}) = \exp \left(- \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m} q_m[c(\mathcal{L})] \right) |0\rangle.$$

BEMERKUNG 5.14. Sei E ein Vektorbündel vom Rang r auf X . Cherncharakter ch und Chernklassen $(c_i)_{i=1,\dots,r}$ von E kann man ineinander umrechnen. Es gilt:

$$\text{ch} = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1 \cdot c_2 + 3c_3) + \dots$$

Wir können den Cherncharakter als Potenzreihe in den Chernklassen schreiben: $\mathfrak{Ch} \in \mathbb{Q}[[c_1, c_2, \dots]]$. Diese Potenzreihe ist invertierbar. Bezeichnen wir die Komponenten des Cherncharakters mit ch_i , so findet man:

$$c = \mathbf{1} + \text{ch}_1 + \frac{1}{2}(\text{ch}_1^2 - 2\text{ch}_2) + \frac{1}{6}(-\text{ch}_1^3 + 6\text{ch}_1 \cdot \text{ch}_2 - 3\text{ch}_3) + \dots$$

Die inverse Potenzreihe bezeichnen wir mit $\mathfrak{C} \in \mathbb{Q}[[\text{ch}_1, \text{ch}_2, \dots]]$. Für eine Klasse $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, $u_i \in H^i(Y)$ schreiben wir etwas verkürzend $\mathfrak{C}(u)$ statt $\mathfrak{C}(u_2, u_4, u_8, \dots)$. Mit dieser Notation:

$$\mathfrak{Ch}(c(E)) = \text{ch}(E) \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}(\text{ch}(E)) = c(E).$$

BEMERKUNG 5.15. Für ein Geradenbündel \mathcal{L} gilt $\text{ch}(\mathcal{L}) = \exp(c_1(\mathcal{L}))$ und daher

$$c(\mathcal{L}^{[n]}) = \mathfrak{C}(\exp(c_1(\mathcal{L}))^{[n]})$$

Aus der letzten Bemerkungen folgt, dass in der Formel (5.13) nur die Klasse $c(\mathcal{L})$ eingeht, nicht das Bündel \mathcal{L} selbst. Man kann sich also fragen, ob (5.13) auch für nicht algebraische Klassen gilt. S. Bossiere und M. Nieper-Wißkirchen zeigen in [13] diese Verallgemeinerung:

SATZ 5.16 (S. Bossiere, M. Nieper-Wißkirchen [13]). Sei $\gamma \in H^2(X)$, $u = \exp(\gamma) = \mathbf{1} + \gamma + \frac{1}{2}\gamma^2$. Es gilt:

$$(5.1) \quad \sum_{n \geq 0} \mathfrak{C}(u^{[n]}) = \exp \left(- \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m} q_m [1 + \gamma] \right) |0\rangle$$

BEISPIEL 5.17. Wir bestimmen nun den Gewicht-3 Anteil der linken Seite von (5.1) für eine Klasse $\gamma \in H^2(X)$. Die relevanten Teile des Exponenten aus (5.1) sind:

$$A = (\mathbf{1}_1 + \gamma_1) - \frac{1}{2}(\mathbf{1}_2 + \gamma_2) + \frac{1}{3}(\mathbf{1}_3 + \gamma_3).$$

Berechnen wir nun die Gewicht-3 Anteile der Potenzen:

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{3}(\mathbf{1}_3 + \gamma_3) \\ (A^2)_3 &= -(\mathbf{1}_1 + \gamma_1)(\mathbf{1}_2 + \gamma_2) \\ (A^3)_3 &= (\mathbf{1}_1 + \gamma_1)^3 \end{aligned}$$

Mit den Kurznotationen aus (3.17) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\exp(\gamma)^{[3]}) &= A_3 + \frac{1}{2}(A^2)_3 + \frac{1}{6}(A^3)_3 \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{1}_3 + \gamma_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \gamma_2 + \gamma_1 \mathbf{1}_2 + \gamma_1 \gamma_2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(\mathbf{1}_1^3 + 3\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 + 3\mathbf{1}_1 \gamma_1^2 + \gamma_1^3) \end{aligned}$$

Sortierung nach kohomologischem Grad ergibt:

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad \mathfrak{C}_0(\exp(\gamma)^{[3]}) &= \frac{1}{6} \mathbf{1}_1^3 = \mathbf{1}_{X^{[3]}} \\
\mathfrak{C}_1(\exp(\gamma)^{[3]}) &= -\frac{1}{2} \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{1}_1^2 \gamma_1 \\
\mathfrak{C}_2(\exp(\gamma)^{[3]}) &= \frac{1}{3} \mathbf{1}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{1}_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 \mathbf{1}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{1}_1 \gamma_1^2 \\
\mathfrak{C}_3(\exp(\gamma)^{[3]}) &= \frac{1}{3} \gamma_3 - \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{6} \gamma_1^3.
\end{aligned}$$

3. Die Fundamentalklasse der Diagonalen

GENERALVORAUSSETZUNG 5.18. In diesem Abschnitt sei X eine projektive K3 Fläche.

SATZ 5.19. Sei $\delta : X \rightarrow X^{[3]}$ die kleine Diagonale (vgl. Kapitel 1, Absatz 2). Die Fundamentalklasse von δ ist gegeben durch:

$$[\delta] = 24 \operatorname{vol}_3 + 3 \operatorname{vol}_1^2 \mathbf{1}_1 + 3 \sum_i \operatorname{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^i.$$

Mit der Notation aus (3.8):

$$[\delta] = 24 \operatorname{vol}_3 + \mathbf{1}_{(1,1,1)}$$

BEWEIS. Die Dimension von X ist zwei, $X^{[3]}$ hat Dimension 6. Die Kodimension von δ hat ist demnach vier. Die Fundamentalklasse ist also ein Element von $H^8(X^{[3]})$. Aus der Fockraumbeschreibung (3.18) von $H(X^{[3]})$ erhalten wir:

$$H^8(X^{[3]}) = \mathbb{C} \langle \operatorname{vol}_3, \gamma_1^i \operatorname{vol}_2, \gamma_2^i \operatorname{vol}_1, \operatorname{vol}_1^2 \mathbf{1}_1, \operatorname{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j \mid i, j = 1, \dots, 22 \rangle.$$

Der allgemeine Ansatz lautet also:

$$(5.3) \quad [\delta] = a \operatorname{vol}_3 + \sum_i b_i \gamma_1^i \operatorname{vol}_2 + \sum_i c_i \gamma_2^i \operatorname{vol}_1 + d \operatorname{vol}_1^2 \mathbf{1}_1 + \sum_{i,j} e_{ij} \operatorname{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j.$$

Wir berechnen die folgenden Integrale auf zwei Arten, woraus wir lineare Bedingungen an $[\delta]$ gewinnen:

$$(5.4) \quad \int_{X^{[3]}} [\delta] \cdot \mathfrak{C}_2(\exp(\gamma)^{[3]}) \quad \text{und} \quad \int_{X^{[3]}} [\delta] \cdot \mathfrak{C}_1(\exp(\gamma)^{[3]})^2$$

dabei ist $\gamma \in H^2(X)$. Wir verwenden zunächst Poincarédualität, um die Integrale über $X^{[3]}$ in Integrale auf X zurückzuführen. Für $\alpha \in H(X^{[3]})$ gilt:

$$\int_{X^{[3]}} [\delta] \cdot \alpha = \int_X \delta^*(\alpha).$$

Wir berechnen nun $\delta^*(u^{[3]})$, $u := \exp(\gamma)$. Dabei benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccc}
X \times X & \xrightarrow{\delta_X} & X \times X^{[3]} & \xrightarrow{\operatorname{pr}_1} & X \\
\downarrow \operatorname{pr}_2 & & \downarrow \operatorname{pr}_2 & & \\
X & \xrightarrow{\delta} & X^{[3]} & &
\end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\delta^*(u^{[3]}) &= \delta^*(\text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \text{ch}(\mathcal{O}_{\Xi_3}))) \\
&= \text{pr}_{2*}(\delta_X^*(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \text{ch}(\mathcal{O}_{\Xi_3}))) \\
&= \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \text{ch}(\mathcal{O}_{\Delta^2})) \\
&= \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \text{ch}(\mathcal{O}_{\Delta} \oplus \Delta_*(\Omega_X))) \\
&= \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \text{ch}(\Delta_*(\mathcal{O}_X \oplus \Omega_X))) \\
&= \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X). \Delta_*(3 - 24 \text{ vol}). \text{td}_X^{-1}) \\
&= \text{pr}_{2*}(\Delta_*(\Delta^*(\text{pr}_1^*(u.\text{td } X)).(3 - 24 \text{ vol}).(\text{td } X)^{-1})) \\
&= u.\text{td } X.(3 - 24 \text{ vol}). \text{td}_X^{-1} \\
&= u.(3 - 24 \text{ vol})
\end{aligned}$$

Dabei wurde Riemann-Roch in der Version aus (5.7), Projektionsformel und die Exaktheit der folgenden Sequenz von Garben auf $X \times X$ benutzt:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta}/\mathcal{I}_{\Delta}^2 = \Delta_*(\Omega_X) \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow 0.$$

Es geht weiter:

$$\begin{aligned}
\delta^*(\mathfrak{C}(u^{[3]})) &= \mathfrak{C}(\delta^*(u^{[3]})) = \mathfrak{C}(\exp(\gamma).(3 - 24 \text{ vol})) \\
&= \mathfrak{C}(3 + 3\gamma + \frac{3}{2}\gamma^2 - 24 \text{ vol}) \\
&= \mathbf{1} + 3\gamma + \frac{1}{2}(9\gamma^2 - 3\gamma^2 + 48 \text{ vol}) \\
&= \mathbf{1} + 3\gamma + 3\gamma^2 + 24 \text{ vol}
\end{aligned}$$

Wir finden also für unsere Integrale (5.4):

$$(5.5) \quad \int_{X^{[3]}} [\delta].\mathfrak{C}_2(\exp(\gamma)^{[3]}) = 24 + 3 \int_X \gamma^2$$

und

$$(5.6) \quad \int_{X^{[3]}} [\delta].\mathfrak{C}_1(\exp(\gamma)^{[3]})^2 = 9 \int_X \gamma^2$$

Wir können diese Resultate nun mit dem Ansatz (5.3) vergleichen. Die Fockraum-beschreibung von $\mathfrak{C}(\exp(\gamma)^{[3]})$ haben wir in (5.2) berechnet.

$$\mathfrak{C}_2(\exp(\gamma)^{[3]}) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_3 - \frac{1}{2}\gamma_2\mathbf{1}_1 - \frac{1}{2}\gamma_1$$

Aus der Tabelle (3.23) entnehmen wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{X^{[3]}} [\delta].\mathfrak{C}_2(\exp(\gamma)^{[3]}) \\
&= \int_{X^{[3]}} (a \text{ vol}_3 + \sum_i b_i \gamma_1^i \text{ vol}_2 + \sum_i c_i \gamma_2^i \text{ vol}_1 + d \text{ vol}_1^2 \mathbf{1}_1 + \sum_{i,j} e_{ij} \text{ vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j) \\
&\quad \cdot (\frac{1}{3}\mathbf{1}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{1}_1\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1\mathbf{1}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{1}_1\gamma_1^2) \\
&= \frac{1}{3}a \int \text{vol}_3 \cdot \mathbf{1}_3 - \frac{1}{2} \sum_i b_i \int \text{vol}_2 \gamma_1^i \cdot \mathbf{1}_2\gamma_1 - \frac{1}{2} \sum_i c_i \int \text{vol}_1 \gamma_2^i \cdot \mathbf{1}_1\gamma_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ij} \int \text{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j \cdot \mathbf{1}_1\gamma_1^2 \\
&= a + \sum_i b_i q(\gamma^i, \gamma) + \sum_i c_i q(\gamma_i, \gamma) + \sum_{i,j} e_{ij} q(\gamma^i, \gamma) q(\gamma^j, \gamma)
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\gamma = t\gamma^k$ mit einem freien Parameter $t \in \mathbb{C}$.

$$\int_{X^{[3]}} [\delta].\mathfrak{C}(\exp(t\gamma^k)^{[3]}) = a + t(b_k + c_k) + t^2 e_{kk}.$$

Zusammen mit (5.5) erhalten wir:

$$(5.7) \quad 24 + 3t^2 = a + t(b_k + c_k) + t^2 e_{kk}$$

für alle $k = 1, \dots, 22$. Wir sehen also: $a = 24, b_k = -c_k, e_{kk} = 3$.

Nun zur zweiten Gleichung: Wir müssen das Produkt

$$\mathfrak{C}_1(\exp(\gamma)^{[3]})^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 - \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2)^2$$

im Kohomologiering von $X^{[3]}$ berechnen. Im Beispiel (4.20) haben wir die wesentlichen Berechnungen schon ausgeführt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 - \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_2)^2 &= (\mathbf{1}_1^2 \gamma_1)^2 - 2\mathbf{1}_1^2 \gamma_1 \cdot \mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1 + (\mathbf{1}_2 \mathbf{1}_1)^2 \\ &= 2\left(\int \gamma^2\right) \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1 + 2\mathbf{1}_1 \gamma_1^2 \\ &\quad - 4(\mathbf{1}_2 \gamma_1 + 2\gamma_2 \mathbf{1}_1) \\ &\quad - 4\text{vol}_1 \mathbf{1}_1^2 - 2 \sum_i \mathbf{1}_1 \gamma_1^i \gamma_1^i + 4\mathbf{1}_3 \end{aligned}$$

Wir setzen wieder $\gamma = t\gamma^k$ und verwenden (3.23), um zu schließen:

$$\begin{aligned} &\int_{X^{[3]}} [\delta].\mathfrak{C}_1(\exp(\gamma)^{[3]})^2 \\ &= \int_{X^{[3]}} (a \text{vol}_3 + \sum_i b_i \gamma_1^i \text{vol}_2 + \sum_i c_i \gamma_2^i \text{vol}_1 + d \text{vol}_1^2 \mathbf{1}_1 + \sum_{i,j} e_{ij} \text{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^j) \\ &\quad \cdot (\mathbf{1}_3 - \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{22} \gamma_1^l \gamma_1^l \mathbf{1}_1 - t(\mathbf{1}_2 \gamma_1^k + 2\mathbf{1}_1 \gamma_2^k) + t^2(\mathbf{1}_1 \gamma_1^k \gamma_1^k + \frac{1}{2} \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1)) \\ &= \left(a \int \text{vol}_3 \cdot \mathbf{1}_3 - d \int \text{vol}_1^2 \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1 - \frac{1}{2} \sum_{l,i,j=1}^{22} e_{ij} \int \gamma_1^i \gamma_1^j \text{vol}_1 \cdot \gamma_1^l \gamma_1^l \mathbf{1}_1 \right) \\ &\quad - t \left(\sum_i b_i \int \text{vol}_2 \gamma_1^i \cdot \mathbf{1}_2 \gamma_1^k + 2 \sum_i c_i \int \text{vol}_1 \gamma_2^i \cdot \mathbf{1}_1 \gamma_2^k \right) \\ &\quad + t^2 \left(\sum_{i,j} e_{ij} \int \gamma_1^i \gamma_1^j \text{vol}_1 \cdot \gamma_1^k \gamma_1^k \mathbf{1}_1 + \frac{1}{2} d \int \text{vol}_1^2 \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_1^2 \text{vol}_1 \right) \\ &= (3a - 2d - \sum_{l=1}^{22} e_{ll}) + t(2b_k + 4c_k) + t^2(2e_{kk} + d) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine zweite Gleichung:

$$(5.8) \quad 9t^2 = (3a - 2d - \sum_{l=1}^{22} e_{ll}) + t(2b_k + 4c_k) + t^2(2e_{kk} + d)$$

Zusammen mit (5.7) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a &= 24 \\ b_k &= 0 \\ c_k &= 0 \\ d &= 3 \\ e_{kk} &= 3 \end{aligned}$$

für alle $k = 1, \dots, 22$. Es bleibt noch $e_{kl} = 0$ für $k \neq l$ nachzuweisen.

Nach dem nachfolgenden Lemma (5.21) gilt:

$$\int [\delta] \cdot \gamma_1^i \gamma_1^j \mathbf{1}_1 = 0$$

für alle $i \neq j$. Mit dem Ansatz für $[\delta]$ gilt aber auch:

$$\begin{aligned} \int [\delta] \cdot \gamma_1^i \gamma_1^j \mathbf{1}_1 &= \sum_{k,l=1}^{22} e_{kl} \int \gamma_1^k \gamma_1^l \text{vol}_1 \cdot \gamma_1^i \gamma_1^j \mathbf{1}_1 \\ &= \sum_{k,l=1}^{22} e_{kl} (\delta_{li} \delta_{kj} + \delta_{lj} \delta_{ki}) \\ (5.9) \qquad \qquad \qquad &= e_{ij} + e_{ji} \end{aligned}$$

Da aber $\gamma_1^i \gamma_1^j \text{vol}_1 = \gamma_1^j \gamma_1^i \text{vol}_1$, können wir annehmen $e_{ij} = e_{ji}$. Wir erhalten die Aussage. \square

LEMMA 5.20. Sei X eine glatte, projektive Fläche, $\alpha \in H(X^{[n]})$. Setze

$$\Xi := \{(A, B) \mid A \subset B\} \subset X^{[n]} \times X^{[n+1]}.$$

Dann ist: $q_1[\mathbf{1}]\alpha = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot [\Xi])$.

BEWEIS. Nach Definition ist $q_1[\mathbf{1}]\alpha = \text{pr}_{3*}(\text{pr}_2^*(\alpha) \cdot \text{pr}_1^*(\mathbf{1}) \cdot [\Xi_{n,1}])$. Dabei ist

$$\Xi_{n,1} = \{(x, A, B) \mid A \subset B, \text{supp}(\mathcal{I}_A/\mathcal{I}_B) = \{x\}\} \subset X \times X^{[n]} \times X^{[n+1]}$$

mit der reduzierten Unterschemastruktur. Die Projektion auf die letzten beiden Faktoren bildet $\Xi_{n,1}$ isomorph auf Ξ ab, denn zwei Unterschemata $(A, B) \in X^{[n]} \times X^{[n+1]}$ mit $A \subset B$ unterscheiden sich immer in genau einem Punkt. Es bezeichne $i : \Xi_{n,1} \rightarrow X \times X^{[n]} \times X^{[n+1]}$ und $j : \Xi \rightarrow X^{[n]} \times X^{[n+1]}$ die Inklusionen. Damit gilt:

$$\begin{aligned} q_1[\mathbf{1}]\alpha &= \text{pr}_{3*}(\text{pr}_2^*(\alpha) \cdot \text{pr}_1^*(\mathbf{1}) \cdot [\Xi_{n,1}]) \\ &= \text{pr}_{3*}(\text{pr}_2^*(\alpha) \cdot [\Xi_{n,1}]) \\ &= \text{pr}_{3*}(i_*(i^*(\text{pr}_2^*(\alpha)))) \\ &= \text{pr}_3|_{\Xi_{n,1}*}(\text{pr}_2|_{\Xi_{n,1}}^*(\alpha)) \\ &= \text{pr}_2|_{\Xi*}(\text{pr}_1|_{\Xi}^*(\alpha)) \\ &= \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot [\Xi]). \end{aligned} \quad \square$$

LEMMA 5.21. Seien $u, v \in H^2(X)$ zwei Klassen mit $u \cdot v = 0$, so gilt:

$$\int [\delta] \cdot \mathbf{1}_1 u_1 v_1 |0\rangle = 0$$

BEWEIS. Identifizieren wir $X^{[1]}$ mit X , so ist nach (3.21) $v_1 |0\rangle = v$. Der Operator $u_1 : H(X^{[1]}) \rightarrow H(X^{[2]})$ ist über die folgende Korrespondenz definiert:

$$\begin{array}{ccc} & X^{[1]} \times X \times X^{[2]} & \\ & \swarrow \qquad \searrow & \\ X^{[1]} \times X & & X^{[2]} \end{array}$$

Für alle $\alpha \in H(X^{[1]})$ gilt: $u_1(\alpha) = \text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Xi_{2,1}])$, dabei ist

$$\Xi_{2,1} = \{(x, y, A) \in X \times X \times X^{[2]} \mid \text{supp}(A) = \{x, y\}\} \subset X^{[1]} \times X \times X^{[2]}.$$

Nach Lemma (5.20) können wir in der Korrespondenz zu $\mathbf{1}_1$ den Faktor X weglassen:

$$\begin{array}{ccc} & X^{[2]} \times X^{[3]} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X^{[2]} & & X^{[3]} \end{array}$$

Es gilt: $\mathbf{1}_1(\alpha) = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(\alpha) \cdot [\Xi])$, dabei ist

$$\Xi = \{(A, B) \mid A \subset B\} \subset X^{[2]} \times X^{[3]}.$$

Wir können die Komposition der Operatoren ausrechnen indem wir die Korrespondenzen komponieren (vgl. [8]). Dazu betrachten wir in $X^{[1]} \times X \times X^{[2]} \times X^{[3]}$ die Untervarietäten $\text{pr}_{123}^{-1}(\Xi_{2,1})$ und $\text{pr}_{34}^{-1}(\Xi)$. Der Schnitt

$$Y := \{(x, y, A, B) \mid A \subset B, \text{supp}(A) = \{x, y\}\}$$

hat Dimension 6 und ist somit eigentlich. Es sei $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Das Schnittprodukt im Chowring ist nun eine ganzzahlige Linearkombination der Klassen $[Y_i]$.

Der Pushforward dieser Klasse unter der Projektion auf die ersten beiden und den letzten Summanden ist eine Linearkombination der Bilder der Komponenten $\text{pr}_{125}(Y_i) =: Z_i$. Es gilt in jedem Falle:

$$\begin{aligned} Z &:= Z_1 \cup \dots \cup Z_k = \text{pr}_{125}(Y) = \{(x, y, B) \mid \exists A \in X^{[2]} : A \subset B, \text{supp}(A) = \{x, y\}\} \\ &= \{(x, y, B) \mid \{x, y\} \subset \text{supp}(B), (x = y \Rightarrow \text{Länge}(B_x) \geq 2)\} \\ &\subset X^{[1]} \times X \times X^{[3]} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit:

$$\mathbf{1}_1 u_1 v_1 |0\rangle = \text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(v) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot \sum_i a_i [Z_i])$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{Z}$. Um jetzt das Produkt mit der Diagonalen zu berechnen, betrachten wir folgendes kartesisches Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X^{[1]} \times X \times X & \xrightarrow{\delta'} & X^{[1]} \times X \times X^{[3]} \\ \downarrow \text{pr}_3 & & \downarrow \text{pr}_3 \\ X & \xrightarrow{\delta} & X^{[3]} \end{array}$$

Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} \int_{X^{[3]}} [\delta] \cdot \mathbf{1}_1 u_1 v_1 |0\rangle &= \int_X \delta^*(\text{pr}_{3*}(\text{pr}_1^*(v) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot \sum_i a_i [Z_i])) \\ &= \int_X \text{pr}_{3*}(\delta'^*(\text{pr}_1^*(v) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot \sum_i a_i [Z_i])) \\ &= \int_{X \times X^{[1]} \times X} \text{pr}_1^*(v) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot \sum_i a_i [\delta'^{-1}(Z_i)] \\ &= \int_{X \times X^{[1]} \times X} k \text{pr}_1^*(v) \cdot \text{pr}_2^*(u) \cdot [\Delta_3] \\ &= k \int_X v \cdot u = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta_3 = \{(x, x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X \times X$ die Diagonale. Die letzte Umformung folgt aus der Identität: $u \cdot v = \Delta^*(\text{pr}_1^*(u) \cdot \text{pr}_2^*(v))$. Der Schritt von der dritten auf die vierte Zeile folgt aus der Beobachtung, dass $\delta'^{-1}(Z) = \Delta_3$ und daher $\delta'^{-1}(Z_i) \subset \Delta_3$. Nun tragen nur die die Komponenten der Dimension zwei zum Integral bei. $\Delta_3 \cong X$ hat jedoch keine echten Unterschemata der Dimension zwei.

Wir können also $\delta'^{-1}(\sum_i a_i [Z_i])$ durch $k[\Delta_3]$ für eine natürliche Zahl k ersetzen. (Aus dem Beweis von (5.19) wissen wir $k = 6$). \square

BEMERKUNG 5.22. Seien $C, D \subset X$ zwei glatte Kurven mit transversalem Schnitt. In diesem Falle können wir unsere Ergebnisse explizit überprüfen. Setze:

$$V := \{A \in X^{[3]} \mid 0 \in \text{supp } A\}$$

$$W := \{\{a, b, c\}_{red} \in X^{[3]} \mid a \in C, b \in D, a, b, c \text{ verschieden}\}^-$$

Wir erhalten die Fundamentalklassen direkt als Produkt von Nakajimaoperatoren:

$$2[V] = \text{vol}_1 \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_1 \quad \text{und} \quad [W] = [C]_1 [V]_1 \mathbf{1}_1$$

Der Schnitt von V und W mit δ ist die Menge aller fetten Punkte, die in $C \cap D$ konzentriert sind und hat die erwartete Kodimension (6). Wir müssen daher nur die Schnittmultiplizitäten berechnen. Nach Wahl von étalen Koordinaten können wir annehmen, dass $X = \mathbb{C}^2$ und C, D die Koordinatenachsen sind. Diesen Fall haben wir bereits in Kapitel 1 Abschnitt 3 untersucht. Wir erhalten:

$$\int [V] \cdot [\delta] = 3 \quad \text{und} \quad \int [W] \cdot [\delta] = 6 \int [C] \cdot [D]$$

Andererseits können wir dieses Schnittprodukt auch in der Nakajimabasis berechnen (vgl. 3.23):

$$\int [V] \cdot [\delta] = \frac{1}{2} \int \text{vol}_1 \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_1 \cdot [\delta] = \frac{3}{2} \int \text{vol}_1 \mathbf{1}_1 \mathbf{1}_1 \cdot \text{vol}_1 \text{vol}_1 = 3$$

und

$$\begin{aligned} \int [W] \cdot [\delta] &= \int [C]_1 [V]_1 \mathbf{1}_1 \cdot 3 \sum_i \text{vol}_1 \gamma_1^i \gamma_1^i \\ &= 3 \sum_i (2 \int [C] \cdot \gamma^i \int [D] \cdot \gamma^i) \\ &= 6 \int [C] \cdot [D]. \end{aligned}$$

Damit haben wir unser Resultat noch einmal experimentell bestätigt.

4. Linearsysteme auf K3 Flächen

GENERALVORAUSSETZUNG 5.23. In diesem Abschnitt sei X eine projektive K3 Fläche.

SATZ 5.24. Sei $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ ein Geradenbündel und $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ ein linearer Unterraum der Dimension 2. Für alle $[s] \in \mathbb{P} := \mathbb{P}(V)$ habe $V(s)$ nur nodale Singularitäten. Setze

$$n_k := \#\{[s] \in \mathbb{P} \mid V(s) \text{ hat } k \text{ Doppelpunkte}\},$$

dann gilt:

$$\sum_{k \geq 1} k n_k = 24 + 3 \int c_1(\mathcal{L})^2.$$

BEWEIS. Wir betrachten die folgende Inzidenzvarietät:

$$Z := \{(A, [s]) \in X^{[3]} \times \mathbb{P} \mid A \subset V(s)\}$$

Z parametrisiert endliche Unterschemata der Länge 3, die in einer Kurve des Linearsystems enthalten sind. Sei nun $V(s)$ glatt, dann hat $V(s)$ keine Unterschemata vom Typ $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$. Der Tangentialraum an $V(s)$ hat nämlich immer Dimension Eins, der an $\mathbb{C}[x, y]/(x, y)^2$ ist zwei-dimensional. Ist $V(s)$ singulär, so

finden wir nach (5.26) für jeden Doppelpunkt ein solches Unterschema. Als Menge gilt also offenbar:

$$Z \cap \text{pr}_1^{-1}(\delta) = \{(A, [s]) \mid A \subset V(S), \mathcal{I}_A = \mathfrak{m}_x^2, \{x\} = \text{supp}(A)\} \subset X^{[3]} \times \mathbb{P}$$

Dieser Schnitt besteht aus genau $\sum_{k \geq 1} k n_k$ Punkten. Es bleiben damit zwei Dinge zu zeigen: Der Schnitt ist transversal und

$$\int [Z] \cdot \text{pr}_1^*([\delta]) = 24 + 3 \int c_1(\mathcal{L})^2.$$

Dies ist der Inhalt der Lemmata 5.29 und 5.30 weiter unten. \square

KOROLLAR 5.25. *Sei $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ ein Geradenbündel und $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ ein linearer Unterraum der Dimension 2. Für alle $[s] \in \mathbb{P} := \mathbb{P}(V)$ habe $V(s)$ höchstens einen Doppelpunkt. Dann gilt:*

$$\#\{[s] \in \mathbb{P} \mid V(s) \text{ singular}\} = 24 + 3 \int c_1(\mathcal{L})^2.$$

LEMMA 5.26. *Sei $C \subset X$ eine singuläre Kurve. Dann enthält C ein Unterschema, isomorph zu $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x, y)^2)$.*

BEWEIS. Sei C singulär an $p \in C$, dann ist $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_C(x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$ mit $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{C,x} \subset \mathcal{O}_{C,x}$. Seien $a, b \in \mathcal{O}_{C,x}$ mit $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{C}\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$. Wir erhalten einen Ringhomomorphismus

$$f : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathcal{O}_{C,x}, \quad x \mapsto a, y \mapsto b.$$

Dieser induziert nach Konstruktion einen Isomorphismus:

$$\mathbb{C}[x, y]/(x, y)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}^2.$$

Das zu \mathfrak{m}^2 assoziierte Unterschema von C erfüllt somit die Behauptung. \square

LEMMA 5.27. *Das Geradenbündel $\mathbb{L} = \text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1))$ auf $X \times \mathbb{P}$ hat einen kanonischen Schnitt mit Verschwindungsort $\Lambda := \{(x, [s]) \in X \times \mathbb{P} \mid x \in V(s)\}$, dem universellen Divisor.*

BEWEIS. Es sei

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}}(-1) \rightarrow 0$$

die Euler-Sequenz auf \mathbb{P} . Auf X haben einen kanonischen Morphismus

$$(5.10) \quad V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$$

induziert durch die \mathcal{O}_X -Modul-Struktur von \mathcal{L} .

Ziehen wir diese Morphismen nun hoch auf das Produkt $X \times \mathbb{P}$, erhalten wir eine Abbildung:

$$(5.11) \quad \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(-1)) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}} \rightarrow \text{pr}_1^*(\mathcal{L})$$

oder äquivalent einen Schnitt in $\text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1))$.

Um den Verschwindungsort dieses Schnittes zu bestimmen, identifizieren wir die Abbildung auf Bündelniveau. Sei $\mathcal{O}(-1)$ das zu $\mathcal{O}(-1)$ und L das zu \mathbb{L} assoziierte Geradenbündel. Es gilt

$$\mathcal{O}(-1) = \{(v, l) \mid v \in l\} \subset V \times \mathbb{P}.$$

Die Abbildung (5.10) ist gegeben durch

$$V \times X \rightarrow L, \quad (v, x) \mapsto v(x) \in L$$

Also ist die Komposition (5.11)

$$\mathcal{O}(-1) \times X \rightarrow L \times \mathbb{P}, \quad (v, l, x) \mapsto (v(x), l)$$

Der Verschwindungsort dieses Schnittes ist demnach

$$\{(x, l) \in X \times \mathbb{P} \mid v(x) = 0 \forall v \in l\} = \Lambda \quad \square$$

LEMMA 5.28. *Die Inzidenzvarietät $Z = \{(A, [s]) \in X^{[3]} \times \mathbb{P} \mid A \subset V(s)\}$ ist der Verschwindungsort eines Schnittes von $E := \text{pr}_1^*(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1))$.*

BEWEIS. Sei Y ein Schema, zu einem Unterschema $A \subset Y$ haben wir eine exakte Sequenz von \mathcal{O}_Y -Moduln:

$$(5.12) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_A \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0.$$

Sei $B \subset Y$ ein weiteres Unterschema. Die Aussage $A \subset B$ ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_A$ über $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_B$ faktorisiert. Nach der universellen Eigenschaft des Kokerns ist dies äquivalent zum Verschwinden des Morphismus

$$\mathcal{I}_B \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_A.$$

Sei $V(s)$ der Verschwindungsort eines Schnittes $[s] \in \mathbb{P}$ und $A \in X^{[3]}$ d.h. $A \subset X$ ein Unterschema der Länge drei. $A \subset V(s)$ ist demnach äquivalent zum Verschwinden der Komposition $\varphi : \mathcal{L}^\vee \cong \mathcal{I}_{V(s)} \rightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_A$.

Wir wollen dieses Kriterium für einen Punkt $(A, [s]) \in X^{[3]} \times \mathbb{P}$ nun für die gesamte Familie entwickeln. Wir haben relative Versionen der Sequenz (5.12): Auf $X \times \mathbb{P}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_\Lambda \longrightarrow 0$$

und auf $X \times X^{[3]}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Xi_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times X^{[3]}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Xi_3} \longrightarrow 0.$$

Diese induzieren exakte Sequenzen auf $X \times X^{[3]} \times \mathbb{P}$ durch Pullback entlang der (flachen) Projektion auf $X \times X^{[3]}$ bzw. $X \times \mathbb{P}$. Der Morphismus φ hat eine globale Version:

$$\Phi : \text{pr}_{13}^*(\mathbb{L}^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times X^{[3]} \times \mathbb{P}} \longrightarrow \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3}).$$

Φ ist somit ein Schnitt in $\text{pr}_{13}^*(\mathbb{L}) \otimes \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3})$.

Ein Schema $A \in X^{[3]}$ ist genau dann in $V(s)$ enthalten, wenn die Einschränkung von Φ auf die Faser über $(A, [s]) \in X^{[3]} \times \mathbb{P}$ identisch verschwindet. Mit anderen Worten $\text{pr}_{23*}(\Phi) \in \text{pr}_{23*}(\text{pr}_{13}^*(\mathbb{L}) \otimes \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3})) = 0$.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \text{pr}_{23*}(\text{pr}_{13}^*(\mathbb{L}) \otimes \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3})) &= \text{pr}_{23*}(\text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \text{pr}_3^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3})) \\ &= \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \text{pr}_{23*}(\text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \text{pr}_{12}^*(\mathcal{O}_{\Xi_3})) \\ &= \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \text{pr}_{23*}(\text{pr}_{12}^*(\text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\Xi_3})) \\ &= \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \text{pr}_1^*(\text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\Xi_3})) \\ &= \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \text{pr}_1^*(\mathcal{L}^{[3]}) \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. \square

LEMMA 5.29. *Der Schnitt $Z \cap \text{pr}_1^{-1}(\delta)$ ist transversal.*

BEWEIS. Nach Wahl von étalen Koordinaten können wir annehmen, dass $X = \mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, $V = \mathbb{C}\langle xy, 1 \rangle$. Wir berechnen nun explizit die Sequenzen aus (5.28). Seien a, b, A, B, C, D lokale Koordinaten für das Hilbertschema $X^{[3]}$ mit:

$$(5.13) \quad \mathcal{I}_\Xi = \begin{pmatrix} \bar{y}^2 + (A\bar{x} + B\bar{y}) + 2(AC - B^2), \\ -\bar{x}\bar{y} + (B\bar{x} + C\bar{y}) + (AD - BC), \\ \bar{x}^2 + (C\bar{x} + D\bar{y}) + 2(BD - C^2) \end{pmatrix}$$

$\bar{x} := x - a, \bar{y} := y - b$. Wir wählen eine lokale Koordinate $t = xy$ auf $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$. Der universelle Divisor ist nun gegeben durch:

$$0 \longrightarrow (xy - t) \longrightarrow \mathbb{C}[x, y, t] \longrightarrow \mathcal{O}_\Lambda \longrightarrow 0$$

Auf dem Produkt $X \times X^{[3]} \times \mathbb{P} \supset \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, a, b, A, B, C, D, t]) =: \text{Spec}(R)$ haben wir nun den Morphismus

$$\Phi : (xy - t)R \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathcal{I}_\Xi R$$

Nun ist $R \cong (xy - t)R$ vermöge $1 \mapsto xy - t$, und damit

$$\text{Hom}_R((xy - t)R, R/\mathcal{I}_\Xi R) \cong \text{Hom}_R(R, R/\mathcal{I}_\Xi R) \cong R/\mathcal{I}_\Xi R.$$

Unter diesen Isomorphismen wird Φ auf $xy - t \in R/\mathcal{I}_\Xi R$ abgebildet. Der Pushforward entlang pr_{23} bildet $R/\mathcal{I}_\Xi R$ als R -Modul auf $R/\mathcal{I}_\Xi R$ als $S := \mathbb{C}[a, b, A, B, C, D, t]$ -Modul ab.

Aus den Gleichungen (5.13) entnimmt man, dass $R/\mathcal{I}_\Xi R$ ein endlicher S -Modul, frei erzeugt von $1, x, y$ ist. Entwickeln wir nun $xy - t$ in dieser Basis, erhalten wir:

$$\begin{aligned} xy - t &= -xb - ya - ab + (B(x - a) + C(y - b)) + (AD - BC) - t \\ &= 1(-ab - Ba - Cb + AD - BC - t) + x(-b + B) + y(-a + C). \end{aligned}$$

Der Verschwindungsort Z von Φ gehört also zum Ideal $\mathcal{I}_z = (ab + Ba + Cb - Ad + BC + t, b - B, a - C) \subset S$. Die kleine Diagonale wird in diesen Koordinaten beschrieben durch $\mathcal{I}_{\text{pr}_1^{-1}\delta} = (A, B, C, D)$. Die Summe der Ideale berechnet man leicht zu $(t, a, b, A, B, C, D) \subset S$. Der Schnitt ist somit transversal. \square

LEMMA 5.30.

$$\int [Z]. \text{pr}_1^*([\delta]) = 24 + 3 \int c_1(\mathcal{L})^2$$

BEWEIS. Nach dem letzten Lemma ist Z der Verschwindungsort eines Schnittes eines Rang 3 Bündels E auf $X^{[3]} \times \mathbb{P}$. Wir erhalten die Fundamentalklasse von Z als Top-Chernklasse von E :

$$[Z] = c_3(E) = c_3(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes \mathbf{1} + c_2(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes t + c_1(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes t^2 + \mathbf{1} \otimes t^3$$

wobei $t := c_1(\mathcal{O}(1))$. In der Künnethzerlegung von $H(X^{[3]} \times \mathbb{P})$ gilt: $\text{pr}_1^*([\delta]) = [\delta] \otimes \mathbf{1}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int [Z]. \text{pr}_1^*([\delta]) &= \int (c_3(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes \mathbf{1} + c_2(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes t + c_1(\mathcal{L}^{[3]}) \otimes t^2 + \mathbf{1} \otimes t^3).([\delta] \otimes \mathbf{1}) \\ &= \int c_2(\mathcal{L}^{[3]}).[\delta] \end{aligned}$$

da das Integral von $t^k \cdot \mathbf{1}$ über $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^1$ trivial ist für alle $k \neq 1$. Dieses Integral haben wir bereits in (5.19) berechnet:

$$\int c_2(\mathcal{L}^{[3]}).[\delta] = 24 + 3 \int c_1^2(\mathcal{L}) \quad \square$$

Literaturverzeichnis

- [1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*. Springer-Verlag (1984).
- [2] A. Beauville: *Counting rational curves on K3 surfaces*. Preprint arXiv: math.AG/9701019 (1997).
- [3] J. Briançon: *Description de $Hilb^n \mathbb{C}\{X, Y\}$* . Invent. Math. 41:45-89 (1977).
- [4] J. Bryan, N.C. Leung: *The enumerative geometry of K3 surfaces and modular forms*. Preprint arXiv: math.AG/9711031.
- [5] G. Ellingsrud, L. Göttsche: *Hilbert schemes of points and Heisenberg algebras*. ICTP Lecture Notes (1999).
- [6] J. Fogarty: *Algebraic Families on an Algebraic Surface*. Am. J. Math. 10 (1968) 511-521.
- [7] L. Göttsche: *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*. Math. Ann. 286 (1990), 193-207.
- [8] W. Fulton, *Intersection Theory*. Erg. Math. (3. Folge) Band 2, Springer Verlag (1984).
- [9] W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge Univ. Press 1997.
- [10] A. Grothendieck: *Éléments de Géométrie Algébrique I*, Publ. Math. IHRES 4 (1960).
- [11] A. Grothendieck: *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert*. Séminaire Bourbaki (1960/61) Vol. 6 Exp. No. 221, 249-276.
- [12] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag (1977).
- [13] S. Boissiere, M. Nieper-Wißkirchen: *Generating series in the cohomology of Hilbert schemes of points on surfaces*. Preprint arXiv:math.AG/0610837.
- [14] S. Boissiere, M. Nieper-Wißkirchen: *Universal formulas for characteristic classes on the Hilbert schemes of points on surfaces*. Preprint arXiv:math.AG/0507470.
- [15] M. Lehn: *Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces*. Inventiones mathematicae 136 (1999) 157 - 207.
- [16] M. Lehn, C. Sorger: *The Cup Product of the Hilbert Scheme for K3 Surfaces*. Inventiones mathematicae 152 (2003) 305 - 329.
- [17] M. Lehn: *Geometry of Hilbert schemes*. CRM Proceedings & Lecture Notes Volume 38 (2004), 1 - 30.
- [18] H. Nakajima: *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of Points on projective Surfaces*. Ann. Math. 145 (1997), 379-388.
- [19] H. Nakajima: *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*. University Lecture Series, AMS (1999).
- [20] G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann: *Singular 3-0-2*. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Center for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005), <http://www.singular.uni-kl.de> .
- [21] S.-T. Yau, E. Zaslow: *BPS states, string duality, and nodal curves on K3*. Nuclear Phys. B 471, 503-512 (1996).